Chapter. 7 First-Order Differential Equations

- 7.1 미분방정식의 모델

미분방정식(도함수를 포함하는 방정식)을 이용하여 1. 박테리아의 수 측정, 2. 죽은 생물의 화석 연대 측정, 3. 물체가 Heating/cooling 하는데 소용되는 시간 및 온도 측정, 4. 은행계좌의 잔액을 구할 수 있다.

<Case 1> 박테리아 수의 변화 및 수의 측정

박테리아는 이분열법 (Binary Fission: each cell reprocesses by dividing into two cells)으로 번식하며, 박테리아 수가 늘어나는 비율은 현재의 박테리아 수에 비례한다

즉, y(t)가 시간 t일 때의 박테리아 수 라고 하면, 시간에 따른 박테리아 수의 변화 비율은 다음과 같다

$y'(t) = ky(t),\ k$: 비례상수

$y(t) > 0$ 가정하고 이것을 풀면 $\displaystyle\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int k\,dt$

$\ln|y(t)| = kt + c \quad \rightarrow \quad \therefore y(t) = e^{kt+c} = e^{kt} \cdot e^{c} = Ae^{kt}$ $\quad$ ($A,\ k$ 두개의 미지수)

이것을 미분방정식의 일반해 (General Solution)라 한다

If k>0 지수성장 법칙 (Exponential Growth Law) : 증가함수
k<0 지수감소 법칙 (Exponential Decay Law) : 감소함수

<예제> 최초에 박테리아 배양기에 100개의 개체가 있으며, 60분이 지난 후에 개체수가 450이 된다.
1) 박테리아 개체수가 지수적으로 증가할 때 t분 후의 개체수를 구하라.
2) 개체수가 두배 (200)가 될 때까지 걸린 시간 구하라.

조건: $y(0) = 100, \quad y(60\,\mathrm{min}) = 450$

1) 미분방정식 $y(t) = Ae^{kt}$에서 $A\,, K$를 구한다

$\rightarrow y(0) = 100 = A\,,\ y(60) = 450 = 100e^{60k} \quad \rightarrow\ 4.5 = e^{60k}$ 양쪽에 ln을 취함

$\ln 4.5 = 60k \quad \rightarrow \quad k = \frac{\ln 4.5}{60} > 0$ (증가함수) 따라서 $\rightarrow \quad y(t) = 100 \exp\left(\frac{\ln 4.5}{60} t\right)$

2) $y(t) = 100 \exp\left(\frac{\ln 4.5}{60} t\right)$ 에서 $y(t) = 200$가 되는 시간 t 구함

$200 = 100 \exp\left(\frac{\ln 4.5}{60} t\right) \rightarrow \ln 2 = \frac{\ln 4.5}{60} t$ 따라서 $\rightarrow \quad t = \frac{60 \ln 2}{\ln 4.5} \cong 27.65\ (min)$

<Case 2> 방사능 감소율 (반감기)을 이용한 고생물 화석의 연대 측정

원소반감기 : 원소의 처음 양이 반으로 감소되는데 걸리는 시간
^{14}C (탄소–14)의 반감기(5730년)를 이용하여 생물 화석의 연대를 측정한다

이것을 방사성 탄소연대 측정법 **(Radio Carbon Dating Method)**이라고 한다.
즉, 방사능 물질의 감소 비율은 현재의 양에 비례한다.

미분방정식 : $y'(t) = k\, y(t)$ (여기에서 k는 감소함수)

이제, 시간 t일 때 방사능 원소의 양이 y(t)이면, 시간에 따른 변화율은

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int k\,dt \quad \rightarrow \quad y(t) = Ae^{kt}$$

<예제> 지금 ^{14}C를 $50g_m$ 갖고 있다면 100년 후에는 얼마나 남는가?

미분방정식 $y(t) = Ae^{kt}$

$\rightarrow y(0) = 50g_m$ (초기 조건)

$\rightarrow y(5730) = 25g_m$ (^{14}C의 반감기 5730년이므로 t=5730년 후)

두 조건을 미분방정식에 대입해서 A, k 구한다.

$\rightarrow y(0) = 50 = A$ $\rightarrow y(5730) = 25 = 50e^{5730k}$ 양변에 ln을 취함

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{5730k} = 5730k \quad \rightarrow \quad k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5730} \cong -1.21 \times 10^{-4} < 0$ (감소함수)

따라서 $y(t) = 50\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5730}t\right)$, $t = 100$년 후 $y(100) = 50\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5730}(100)\right) \cong 49.4\ g_m$

<Case 3> 물체를 Heating/Cooling 하는데 소요되는 시간 및 온도측정 (열전달 문제 해석)

뉴턴의 냉각 법칙 (Newton's Law of Cooling) : 물체에서의 Heating/Cooling 비율은 물체의 온도와 주변 온도와의 차이에 비례한다

물체온도 y(t), T_a: 주변온도

1) Cooling의 경우 $y(t) > T_a$

미분방정식: $y'(t) = K(y(t) - T_a)$ (여기에서 K는 열전달계수)

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - T_a} dt = \int k\, dt \qquad \ln|y(t) - T_a| = Kt + c$$

$$\therefore y(t) = e^{kt+c} + T_a = e^{kt} \cdot e^{c} + T_a = Ae^{kt} + T_a$$

2) Heating의 경우 $y(t) < T_a$

미분방정식: $y'(t) = K\left(T_a - y(t)\right)$

$$\therefore y(t) = T_a - Ae^{kt}$$

<예제> 커피의 최초 온도가 180°F이고 2분 후의 온도가 165°F일 때, 임의의 시간 t일 때 커피의 온도와 커피가 120°F가 되는 때까지 소요되는 시간을 구하라. 단 주위의 온도는 70°F라고 가정한다.

$y(0) = 180°\mathrm{F}$ 초기온도 $T_a = 70°\mathrm{F}$

$y(2) = 165°\mathrm{F}$ 2분 후의 온도

미분방정식 $y(t) = Ae^{kt} + 70$ 두 조건을 식에 대입

$y(0) = 180 = A + 70 \quad \rightarrow \quad \therefore A = 110$

$y(2) = 165 = Ae^{kt} + 70 = 110e^{2k} + 70 \qquad \therefore e^{2k} = \dfrac{95}{110}$

양변에 ln을 취함:

$2k = \ln\left(\frac{95}{110}\right) \qquad \therefore k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{95}{110}\right) \cong -0.073$ (감소함수) 따라서 $\rightarrow$ $y(t) = 110\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{95}{100}\right)t\right) + 70$

$$y(t) = 120 = 110\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{95}{100}\right)t\right) + 70 \quad \rightarrow \quad \frac{50}{110} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{95}{100}\right)t\right)$$

양변에 ln을 취함: $\ln\left(\dfrac{50}{110}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{95}{100}\right)t$ 따라서 $\rightarrow$ $t = \dfrac{\ln\left(\frac{50}{110}\right)}{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{95}{100}\right)} \approx 10.76(min)$

<Case 4> 은행계좌 잔액 계산

연이율 r(rate of annual interest)로 원금 P(Principal)달러를 일년에 n번의 복리로 투자할 때

t년 후의 총액은 $P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$이고, 연속 복리로 투자하면 (즉, n → ∞의 극한 취함)

$\lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$이 된다.

$\frac{n}{r} = m$ 로 할 때 $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e$

$$\Rightarrow \lim_{\frac{n}{r}\to\infty} P\left(1+\frac{1}{n/r}\right)^{\frac{n}{r}(rt)} = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m(rt)} = P\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} = Pe^{rt}$$

다른 방법 : 연속복리로 투자한 원금의 t년 후의 합은 y(t)라고 하면,
y(t)의 변화율 y′(t)=ry(t)로 표시된다 (r : 연이율)

이 방정식의 일반해는 $y(t) = Ae^{rt}$

만약 t=0 (첫해) 원금이 P 달러인 경우 $y(t) = Pe^{rt}$가 된다

<예제> 복리 비교

연이율 r=5.75%로 원금 P=$7,000을 투자할 때 t=5년 후의 총액을 계산하라

1. 연 복리의 경우 $n = 1$ (1번/year)

$$P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 7{,}000\left(1+\frac{0.0575}{1}\right)^{5} \cong 9{,}257$$

2. 월 복리의 경우 $n = 12$ (12번/year)

$$P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 7{,}000\left(1+\frac{0.0575}{12}\right)^{(12)(5)} \cong 9{,}325$$

3. 일 복리의 경우 $n = 365$ (365번/year)

$$P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 7{,}000\left(1+\frac{0.0575}{365}\right)^{(365)(5)} \cong 9{,}331.4$$

4. 연속 복리의 경우 $n \to \infty$

$$Pe^{rt} = 7{,}000e^{(0.0575)(5)} \cong 9{,}331.6$$

<예제>

(a) $P = \$10{,}000$가 매년 $r = 24\%$씩 연속적으로 감소할 때 $(r = -0.24)10$년, 20년 후의 자산 가치를 계산하라.

$t = 0 \quad y(t = 0) = Ae^{0} \quad \Longrightarrow \quad A = 10{,}000$

$t = 10 \quad y(t = 10) = 10{,}000e^{(-0.24)(10)}$ =\$907.2

$t = 20 \quad y(t = 20) = 10{,}000e^{(-0.24)(20)}$ =\$82.3

<예제>

(b) (a)에서 구한 값 들과 자산가치가 <u>선형적으로 감소하여 20년 후에는 제로</u>가 되는 경우와 비교하라

풀어야 할 방정식 : $y(t) = at + b$ 두 조건: y(t=0) = 10,000, y(20) =0

두 조건을 대입하여 풀면 a=0, b $= 10{,}000$

$\Longrightarrow \quad y(t) = -500t + 10{,}000$

$When, \quad t = 10, \quad y(t = 10) = -500(10) + 10{,}000 = \$5{,}000$

$t = 20, \quad y = 0$

<연습문제 7.1>

<문제 11> 화석의 현재 ^{14}C의 양이 처음 양의 20%라고 추측한다. ^{14}C의 원소반감기가 5730년이라면 이 화석의 나이는 얼마인가?

시간 t일 때 ^{14}C의 양을 y(t)라 하면 시간에 따른 변화율 $y'(t) = ky(t) \implies$ 일반해 $y(t) = Ae^{kt}$

조건: $y(0) = P$ (가정), $y(t) = \frac{1}{5}P$ (현재의 조건), $y(5730) = \frac{1}{2}P$ 일반해에 대입한다.

$\implies$ $y(0) = P = Ae^{o} = A \implies y(t) = Pe^{kt}$

$y(5730) = \frac{1}{2}P = Pe^{5730k} \implies \frac{1}{2} = e^{5730k}$,

양변에 ln 취함 $\implies \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 5730k \implies k = -\frac{\ln 2}{5730}$

따라서 $y(t) = Pe^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$ 가 된다. 이제 현재의 조건 $y(t) = \frac{1}{5}P$를 대입하여 t를 구한다.

$Pe^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = \frac{1}{5}P \implies e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = \frac{1}{5}$ 양변에 ln 취함 $\implies -\frac{\ln 2}{5730}t = \ln(\frac{1}{5})$

따라서 $t = \frac{5730 \ln 5}{\ln 2} \cong 13{,}305$ years

- 7.2 변수분리형 미분방정식

일계 상미분방정식 (First-order Ordinary Differential Equation)

$$y' = f(x, y)$$

위 방정식의 변수 x, y를 각각 양변을 분리하여 $g(y)y' = h(x)$의 형태로 다시 쓸 수 있는 경우 “변수분리형 " 이라 한다

즉, 두 변수 x와 y가 곱셈과 나눗셈으로 되어있어야 한다

<예제> $y' = xy^2 - 2xy$의 해를 구하라

x, y의 곱으로 변형 $\Longrightarrow$ $y' = x(y^2 - 2y)$

변수를 분리한다 $\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{y^2 - 2y} y' = x$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{y^2 - 2y} \dfrac{dy}{dx} = x$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{y^2 - 2y} dy = x dx$

$\displaystyle\int \frac{1}{y^2 - 2y} dy = \int x\, dx$ 부분분수를 만들어 적분

$\dfrac{1}{y(y-2)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{y-2}$

양변에 y(y-2)곱한다 $\Longrightarrow$ 1=A(y-2)+By

When y=2, 1=2B $\Longrightarrow$ B=1/2

When y=0, 1=A(-2) $\Longrightarrow$ A=-1/2

$$\frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-2}\right) dy = \int x\, dx \Longrightarrow \frac{1}{2}[-\ln y + \ln(y-2)] = \frac{x^2}{2} + c \Longrightarrow \frac{y-2}{y} = e^{x^2+2c} = Ce^{x^2}$$

따라서 $y = \dfrac{2}{1 - Ce^{x^2}}$

<예제> $y' = xy^2 - 2x^2y = xy(y-2x)$ x,y 변수를 분리할 수 없다

Note : 변수분리형 미분방정식이 되기 위해서는 두 변수 x와 y가 곱셈과 나눗셈으로 되어 있어야 한다

(예) $y' = xy(y-2x)$가 $y' = x^2(2-y)$혹은 $y' = y^2(x-2x^2)$의 경우는 변수 분리할 수 있다

<예제> $y' = \dfrac{(x^2+7x+3)}{y^2}$ 의 해를 구하라

변수분리 $y^2y' = x^2+7x+3$

적분하면 $\int y^2\,dy = \int (x^2+7x+3)\,dx \rightarrow \dfrac{y^3}{3} = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{7}{2}x^2 + 3x + C$

$Thus,\quad y = \sqrt[3]{x^3 + \dfrac{21}{2}x^2 + 9x + 3C}$ 미분방정식의 일반해

여기에서, C값에 따라서 여러가지 다른 해를 얻을 수 있다 (그림7.6 해집합 참조)

이 곡선이 지나가는 한점 (x_0, y_0)을 알면 한 개의 곡선을 알 수 있다
즉 $y(x_0) = y_0$는 초기조건(Initial Condition) 이다

초기조건을 갖는 미분방정식을 초기값문제 (Initial Value Problem)라 부른다

<예제> 초기값 문제

$$y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}, \qquad y(0) = 3$$

앞에서 미분방정식의 일반해는 $y = \sqrt[3]{x^3 + \left(\frac{21}{2}\right)x^2 + 9x + 3C}$

여기에 초기조건을 대입하면 $3 = \sqrt[3]{3c} \quad \Longrightarrow \quad C = 9$

따라서 일반해는 $y = \sqrt[3]{x^3 + \left(\frac{21}{2}\right)x^2 + 9x + 27} \quad \Longrightarrow \quad Explicit\ Solution$

$Explicit\ Solution\ (or\ Function)$: y를 x의 함수로 표시할 수 있다 (즉 $y = f(x)$)

$Implicit\ Solution\ (or\ Function)$ 음함수 해 : y를 x의 함수로 표시할 수 없다 (즉 $y \neq f(x)$)

<예제> 음함수 해를 갖는 초기값 문제

$$y' = \frac{9x^2 - \sin x}{\cos y + 5e^y} \qquad y(0) = \pi$$ 변수분리 및 양변을 x, y에 관하여 적분

$$\int (\cos y + 5e^y)\, dy = \int (9x^2 - sinx)\, dx$$

$\sin y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + C$ 초기조건 적용 $\Longrightarrow$ $C = 5e^\pi - 1$

$Finally,$ $\sin y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + 5e^\pi - 1 \quad \Longrightarrow \quad y \neq f(x)$

$This\ is\ an\ implict\ solution\ \ because\ y\ cannot\ be\ explicitly\ expressed\ with\ regard\ to\ x$

<연습문제 7.2>

<문제 8> 다음 미분방정식의 일반해를 구하라 $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+c} = e^{\ln\sqrt{1+x^2}+c} = Ce^{\ln\sqrt{1+x^2}} = C\sqrt{1+x^2}$$

치환적분 : 치환함수의 도함수가 피적분 함수의 일부인 경우 성립됨

$u = 1+x^2 \ \rightarrow du = 2xdx$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c = \ln\sqrt{1+x^2} + c$$

<Extra Problem> 초기조건 y(0)=1 을 갖는 다음의 미분방정식을 풀어라

$y' = 4y - y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'}{4y - y^2} = 1$ 양변을 적분 $\int \frac{dy}{4y - y^2} = \int dx$

여기에서 $\frac{1}{y(4-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{4-y}$ 양변에 y(4-y) 곱한다 $1 = A(4-y) + By$

$at\ y = 0, \quad 1 = 4A \ \therefore A = \frac{1}{4}$ at $y = 4, \quad 1 = \frac{1}{4}(4-4) + 4B \ \therefore B = \frac{1}{4}$

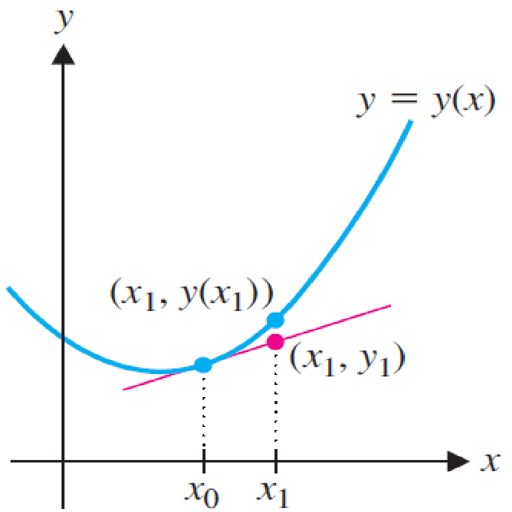
따라서, $\int \frac{1}{y(4-y)} dy = \int \left(\frac{1}{4y} + \frac{1}{4(4-y)} \right) dy = \int dx$

$\frac{1}{4} \ln y + \frac{1}{4} \ln(4-y) = x + c \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(y(4-y)\right)^{\frac{1}{4}} = x + c$

따라서, $y(4-y) = e^{4(x+c)} = Ae^{4x}$ 초기조건 적용 : $y(0) = 1, \ 1(4-1) = Ae^0 \quad \therefore A = 3$

$Finally\ \ y(4-y) = 3e^{4x}$ (This is an Implicit Solution because $y \neq f(x)$)

- 7.3 오일러 방법 (Euler's Method: 접선을 이용하여 미분방정식의 근사값을 구하는 방법)



$Euler\ Method$: $y(x_1) \approx y_1$으로 간주하는 것임

(x_0, y_0)는 $y = y(x)$위의 한 점으로 이미 알고 있다 (초기값)

- 다음의 초기값을 갖는 미분 방정식을 생각해보자

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

이 미분방정식의 해 $y = y(x)$가 존재한다면, 임의의 점 (x_0, y_0)에서의 해곡선에 대한 접선의 기울기가 $f(x_0, y_0)$가 된다. (이 경우는 임의의 점 (x_0, y_0)이고, 이점에서의 접선의 기울기가 $f(x_0, y_0)$이다)

결국 $Euler\ Method$는 $y(x_1) \approx y_1$으로 간주하는 것이다.

따라서, $x = x_1$에서의 해의 근사값은 $y(x_1) \approx y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)h$

마찬가지로, $x = x_2$에서의 해의 근사값은 $y(x_2) \approx y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) = y_1 + f(x_1, y_1)h$

결과적으로 $\boldsymbol{y(x_{i+1}) \cong y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2 \cdots}$

<예제>　Euler Method를 이용하여 미분방정식의 근사해를 구하라

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 0,\ y_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y' = f(0,1) = 1 \qquad h = (x_{i+1} - x_i) = 1$$

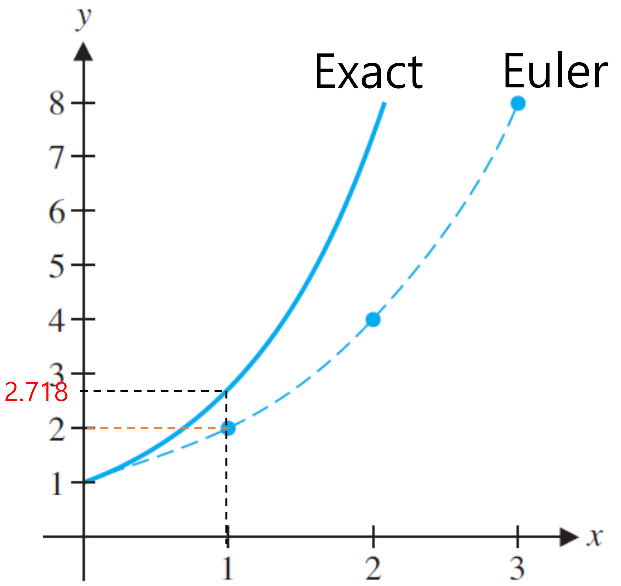
$$y_1 = y_0 + hf(\underset{0,}{x_0}, \underset{1}{y_0}) = 1 + 1(1) = 2$$

$$y_2 = y_1 + hf(\underset{1,}{x_1}, \underset{2}{y_1}) = 2 + 1(2) = 4$$

$$y_3 = y_2 + hf(\underset{2,}{x_2}, \underset{4}{y_2}) = 4 + 1(4) = 8$$

<Exact Solution>

$y' = y$의 해 $y = Ae^x$ 에 초기 조건(x=0, y=1)를 적용함 $\Longrightarrow$ A=1 $\therefore y = e^x$



$x = 1, \qquad y_1 = e^1 \cong 2.71828$

$x = 2, \qquad y_2 = e^2 \cong 7.389$

$x = 3, \qquad y_3 = e^3 \cong 20.086$

Note : $x_{i+1} - x_1 = h$ 값이 작을수록 Exact-Euler 값 간의 차이가 줄어든다

<예제> 미분방정식의 초기값 문제의 근사해를 구하라

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(-1) = -\frac{1}{2} \ \left(x_0 = -1, y_0 = -\frac{1}{2}\right) \ \textcolor{red}{choose} \ \ h = 0.1$$

$$y(x_1) \cong y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = -\frac{1}{2} + 0.1\left[(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] = -0.375$$

$$y(x_2) \cong y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = -0.375 + 0.1[(-1 + 0.1)^2 + (-0.375)^2] = -0.2799375$$

$$\vdots$$

$$y(x_{10}) \approx y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9) = -0.0579176$$

$$\vdots$$

$$y(x_{30}) \approx y_{30} = y_{30} + hf(x_{29}, y_{29}) = 5.235265$$

<연습문제 7.3>

<문제 7>

미분방정식의 초기값 문제를 Euler방법을 이용하여 h=0.1인 경우에 y(1)과 y(2)의 근사해를 구하라

$y' = 2xy, \qquad y(0) = 1$

Note : y(1) ⟹ h=0.1이므로 x=1을 10개로 자른 것이다.

y(2) ⟹ h=0.1이므로 x=2을 20개로 자른 것이다.

$Euler\ Method: \ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad i = 0,1,2 \cdots$

$for\ i = 0 \quad y_0 = 1$

$$y_1 = y_0 + 0.1f(x_0, y_0) = y_0 + 0.1(2 \times x_0 \times y_0) = 1 + 0.1(2 \times 0 \times 1) = 1$$

$$y_2 = y_1 + 0.1f(x_1, y_1) = 1 + 0.1(2 \times 0.1 \times 1) = 1.02$$

$$y_3 = y_2 + 0.1f(x_2, y_2) = 1.02 + 0.1(2 \times 0.2 \times 1.02) = 1.0608$$

$$\vdots$$

$$y_{10} = y_9 + 0.1f(x_9, y_9) = 2.3346333$$

$$\vdots$$

$$y_{20} = y_{19} + 0.1f(x_{19}, y_{19}) = 29.49864321$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x\, dx \Rightarrow \ln y = x^2 + c \Rightarrow y = e^{x^2+c} = Ae^{x^2} \Rightarrow \therefore y = e^{x^2}$$

$y(1) = e^1 = 2.71828 \ > 2.3346333$

$y(2) = e^4 = 54.598 \ > 29.49864321$

$Exact$ 값이 근사값보다 훨씬 크다

<문제 8> $y' = 4y - y^2, \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$인 경우에 y(1)의 근사해를 구하라

$Euler\ Method:\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,2\cdots$

$$y_1 = 1 + 0.1f(4y_0, {y_0}^2) = 1 + 0.1(4(1) - 1^2) = 1.3$$

$$y_2 = 1.3 + 0.1f(4(1.3) - (1.3)^2) = 1.651$$

$$y_3 = 1.651 + 0.1f(4(1.651) - (1.651)^2) = 2.0388199$$

$$\vdots$$

$$y_{10} = 3.847783601$$

<문제 10> $y' = \sqrt{x + y}, \quad y(0) = 1 \quad h = 0.1$인 경우에 y(2)의 근사해를 구하라

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1\sqrt{0.1 + 1} = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1\sqrt{0.1 + 1.1} = 1.209544512$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_1, y_1) = 1.209544512 + 0.1\sqrt{0.2 + 1.209} = 1.328268752$$

$$\vdots$$

$$y_{10} = 2.395982932$$

$$\vdots$$

$$y_{20} = 4.568765342$$

<연습문제 7.4>

<문제 1> 다음 먹이사슬 모델 문제의 모든 평형점을 구하고 설명하여라

포식동물 –먹이모델 (Predator-prey)

먹이의 개체수 x(t)
포식동물 개체수 g(t)

$$x' = 0.2x - 0.2x^2 - 0.4xy$$
$$y' = -0.1y + 0.2xy$$

평형점은 $x'(t) = 0,\ y'(t) = 0$를 만족하는 점이다

따라서,

$$0 = 0.2x - 0.2x^2 - 0.4xy \quad \rightarrow 0 = x(0.2 - 0.2x - 0.4y) \quad \cdots\cdots 1$$
$$0 = -0.1y + 0.2xy \quad \rightarrow 0 = y(-0.1 + 0.2x) \quad \cdots\cdots 2$$

For 1 $\quad x = 0\ \ or\ 0.2 - 0.2x - 0.4y = 0 \quad (x + 2y = 1)$

For 2 $\quad y = 0\ \ or\ \ x = 0.5$

1과 2를 모두 만족하는 모든 평형점들 (x,y)

(0, 0) 먹이와 포식동물이 존재 안함
(1, 0) 먹이는 100, 포식동물은 0
(0.5, 0.25) 먹이가 포식동물의 두배

<문제 6> 다음 종족모델 문제의 평형점을 구하고 설명하라

$x' = 0.3x - 0.2x^2 - 0.1xy$ $x(t)$: 종족 X의 개체수

$y' = 0.2y - 0.1y^2 - 0.1xy$ $y(t)$: 종족 Y의 개체수

평형점은 $x'(t) = 0$, $y'(t) = 0$를 만족하는 점이다

$$0 = 0.3x - 0.2x^2 - 0.1xy = x(0.3 - 0.2x - 0.1y) \quad \cdots\cdots 1$$

$$0 = 0.2y - 0.1y^2 - 0.1xy = y(0.2 - 0.1y - 0.1x) \quad \cdots\cdots 2$$

1과 2를 만족하는 모든 평형점들

$x = 0$ 또는 $0.3 - 0.2x - 0.1y = 0$

$y = 0$ 또는 $0.2 - 0.1y - 0.1x = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ 또는 $2x + y = 3$

$y = 0$ 또는 $x + y = 2$

모든 평형점들 (x,y)

(0, 0)	두 종이 다 존재하지 않음
(0, 2)	Y는 존재하나 X는 존재하지 않음
(1.5, 0)	X는 존재하나 Y는 존재하지 않음
(1, 1)	X와 Y가 같은 양 만큼 존재한다

<문제 8> 다음 미분방정식을 연립 일계 미분방정식으로 바꾸어라

$y'' + 2xy' + 4y = 4x^2 \qquad u = y, \qquad v = y'$

$1. u' = v, \qquad v' + 2xv + 4u = 4x^2$

$Thus, \qquad 2. v' = -2xv - 4u + 4x^2$

<문제 10> 다음 연립방정식의 모든 평형점을 구하라

$x' = (x^2 - 4)(y^2 - 9)$

$y' = x^2 - 2xy$

평형점은 $x'(t) = 0$, $y'(t) = 0$ 에서 만족한다

$0 = (x+2)(x-2)(y+3)(y-3), \qquad 0 = x(x - 2y)$

$x = 2, x = -2, y = -3, y = 3, \qquad x = 0, \qquad x = 2y$

따라서 모든 평형점들은

$(2,1), (-2,-1), (-6,-3), (6,3), \qquad (0,3), \qquad (0,-3)$