Chapter. 6 적분법

- 6.1 적분공식과 적분법의 복습

<예제> 간단한 치환 $\int \sin(ax)\,dx \quad a \neq 0$

(치환적분) : 치환함수의 도함수가 피적분함수의 일부인 경우

$$u = ax, \qquad du = a\,dx$$

$$\int \sin(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int \sin u\,du = -\frac{1}{a}\cos u + c = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$$

<예제> 기본공식의 일반화 $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$ 사용

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx \quad = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx \qquad\qquad u = \frac{x}{a}, \qquad du = \frac{1}{a}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{1}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1} u + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

<예제> 완전제곱식으로 바꾸어야 하는 적분 $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + c$ 이용

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-5-(x^2-6x+9)+9}} = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}dx$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}}dx \qquad u = \frac{x-3}{2}, \qquad du = \frac{1}{2}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \sin^{-1}u + c = \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c$$

<예제>　좀 더 복잡한 적분

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}dx = \int \frac{4x+4-3}{2x^2+4x+10}dx = \int \frac{4x+4}{2x^2+4x+10}dx - \int \frac{3}{2x^2+4x+10}dx$$

$$where, \int \frac{3}{2x^2+4x+10}dx = \int \frac{3}{2(x^2+2x+5)}dx = \int \frac{3}{2(x+1)^2+8}dx = \int \frac{3}{8\left[\frac{1}{4}(x+1)^2+1\right]}dx$$

$$= \int \frac{3}{8\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}dx \qquad u = \frac{x+1}{2}, \qquad du = \frac{1}{2}dx$$

$$= \frac{3}{8}(2)\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{3}{4}\tan^{-1}u = \frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

$$Thus, \int \frac{4x+4}{2x^2+4x+10}dx - \int \frac{3}{8\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}dx = \ln|(2x^2+4x+10)| - \frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

Obtain the same solution as the textbook on p. 368

$$= \ln\left(8\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right)\right) - \frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

$$= \ln 8 + \ln\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right) - \frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

$$= \ln\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right] - \frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \ln 8 + c \qquad \ln 8 + c \implies C$$

$$= \ln\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right] - \frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

- 6.2 부분적분법 (Integration by parts)

x^n(다항식), $\sin x$, $\cos x$, e^x(자연지수함수), $ln\, x$ (자연로그함수)같은 함수들이 곱해져 있을 때 사용함

<예제> $\int x \sin x \, dx$ 는 치환적분으로 풀 수가 없다

미분의 곱의 법칙 $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

양변 적분 $\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$

다시 쓰면 $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

이제 $u = f(x)$, $dv = g'(x)dx$ 라고 하면
$du = f'(x)dx$, $v = g(x)$ 이다

위의 식을 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ 로 쓸 수 있다

<예제> $\int x \sin x \, dx$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx, \qquad v = -cosx$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

<예제> u 와 dv를 잘못 선택한 경우

$$\int x \sin x \, dx = uv - \int v \, du$$

$u = \sin x, \qquad dv = xdx$

$du = \cos x \, dx, \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$= \sin x \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx$$

처음보다 더 어려워짐

<예제> 항이 하나인 함수의 적분

$$\int \ln x \, dx$$

$u = \ln x, \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx, \qquad v = x$

$$= x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx = x \ln x - x + c$$

<예제> 부분적분법의 반복 적용

$$\int x^2 \sin x\,dx \qquad u = x^2,\quad dv = \sin x\,dx \qquad du = 2x dx,\quad v = -\cos x$$

$$= -x^2\cos x = -\int (-\cos x)\,2x dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

$$\int x\cos x\,dx \qquad u = x,\quad dv = \cos x\,dx \qquad du = dx,\quad v = \sin x$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

<예제> 부분적분하면 같은 적분식이 나옴

$$\int e^{2x}\sin x\,dx \qquad u = e^{2x},\quad dv = \sin x\,dx \qquad du = 2e^{2x}dx,\quad v = -\cos x$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx \qquad u = e^{2x},\quad dv = \cos x\,dx \qquad du = 2e^{2x}dx,\quad v = \sin x$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2\left(e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx\right) = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx + c$$

$$Thus,\ \int e^{2x}\sin x\,dx = -\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x + c$$

- **점화식 (Reduction Formula)**

임의의 자연수 n에 대하여 $\int x^n\, e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1}\, e^x dx$

$u = x^n, \quad dv = e^x dx$
$du = nx^{n-1}dx, \quad v = e^x$

<예제> 점화식 이용

$$\int x^4\, e^x dx$$

$u = x^4, \quad dv = e^x dx$
$du = 4x^3 dx, \quad v = e^x$

n=4인 경우 $= x^4 e^x - 4 \int x^3\, e^x dx$

n=3인 경우 $\int x^3\, e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2\, e^x dx$

n=2인 경우 $\int x^2\, e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x\, e^x dx$

n=1인 경우 $\int x\, e^x dx = xe^x - \int x^0\, e^x dx + c = xe^x - e^x + c$

$$Finally, \quad \int x^4\, e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x + c$$

<예제> 부분 적분을 이용한 정적분

$$\int_1^2 x^3 \ln x \, dx \qquad u = \ln x, \quad dv = x^3 dx \qquad du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \frac{1}{4} x^4$$

$$= \int_1^2 x^3 \ln x \, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4} x^4 \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{4} \int_1^2 x^3 \, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{16 \ln 2}{4} - 0 - \frac{1}{16} [2^4 - 1^4] = 4 \ln 2 - \frac{15}{16}$$

- 6.3 삼각함수의 적분

피적분 함수가 하나 이상의 삼각 함수의 거듭제곱을 포함함

A. $\boldsymbol{sin\,x}$와 $\boldsymbol{cos\,x}$가 포함된 경우 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

(case 1) m 또는 n이 양의 홀수 (m, n ≥ 3)

m : 홀수 $\Rightarrow \sin x$를 하나 분리 $\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$로 바꿈 $\Rightarrow \cos x$ 를 u로 치환

n : 홀수 $\Rightarrow \cos x$를 하나 분리 $\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$로 바꿈 $\Rightarrow \sin x$ 를 u로 치환

<예제> 삼각함수의 적분

$\int \cos^4 x \sin x \, dx$ 치환적분 : 치환함수의 도함수가 피적분함수의 일부이다

$u = \cos x\,, \qquad du = -\sin x \, dx$

$$= -\int u^4 \, du = -\frac{u^5}{5} + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + c$$

<예제>   사인함수의 홀수 제곱의 적분

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx \qquad u = \cos x, \qquad du = -\sin x \, dx$$

$$= \int \cos^4 x \sin x \,(1 - \cos^2 x) dx = -\int u^4 \,(1 - u^2) du = -\int (u^4 - u^6) \, du = -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right) + c$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

(case 2) m 또는 n이 양의 짝수인 경우 $\Rightarrow$ 반각공식 사용

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$$

<예제> $$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int (1 - cos2x) \, dx = \frac{1}{2}\left(x - sin2x\left(\frac{1}{2}\right)\right) + c = \frac{1}{4}(2x - sin2x) + c$$

Note: $u = 2x, du = 2dx$를 이용하여 치환할 수도 있다.

<삼각함수의 Formula 정리>

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \therefore\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\csc^2 x = 1 + cot^2 x \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c \qquad \int \csc^2 x\, dx = -cot\, x + c \qquad \int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \sec x \tan x\, \mathrm{dx} = \sec x + \mathrm{c} \qquad \int csc\, x \cot x = -\csc x + \mathrm{c}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad sec\, x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = sin^{-1} x + c$$

<예제> $\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + cos^2 2x)dx$$

$where,$ $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$ 이므로

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + 2\left(\frac{1}{2}\right)\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\sin 4x\right) + c$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

B. $\tan x$와 $\sec x$가 포함된 경우

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$

Note : $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad or \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

(case 1) m이 양의 홀수

$\Longrightarrow \sec x \tan x$ 를 하나 분리 $\Longrightarrow$ $\tan^2 x$ 를 $\sec^2 x - 1$로 바꾸고 $\Longrightarrow$ $u = \sec x$로 치환

<예제> $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \,(\sec x \tan x)\, dx$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x \,(\sec x \tan x)\, dx \qquad u = \sec x, \qquad du = \sec x \tan x \, dx$$

$$= \int (u^2 - 1)\, u^2 du = \int (u^4 - u^2)\, du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c$$

$$= \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + c$$

(case 2) n이 양의 짝수

$\Longrightarrow$ $\sec^2 x$하나분리 $\rightarrow$ 남아있는 $\sec^2 x$를 $1+\tan^2 x$로 바꿈 $\rightarrow u = \tan x$로 치환, $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ 이용

<예제> $\displaystyle\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx = \int \tan^2 x\,(1+\tan^2 x)\sec^2 x\, dx$

$u = \tan x$, $du = \sec^2 x\, dx$ 이므로

$$= \int u^2(1+u^2)\,du = \int (u^2+u^4)\,du = \frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+c = \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$$

<예제> 특별한 (예외적인) 경우

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx$$

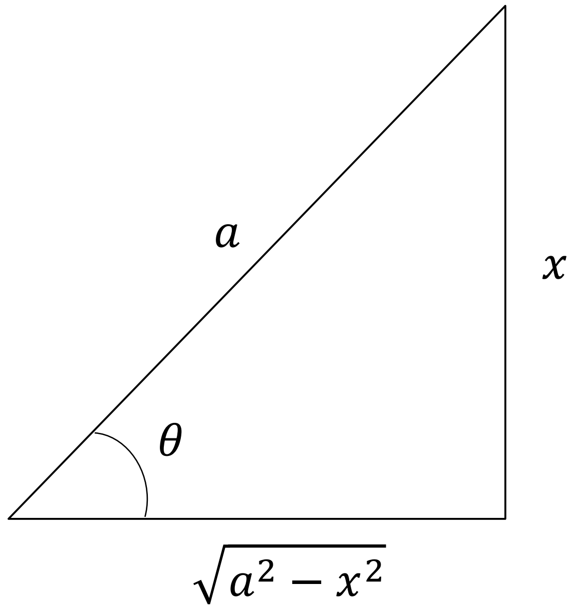
$$= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

<삼각치환법> $\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2}, \sqrt{x^2 - a^2}$ 에서 삼각 함수를 포함하는 치환법으로 제곱근호를 없앤다

Note: 간단한 치환이나 부분적분법으로 계산할 수가 없는 경우에 삼각치환법을 사용

피적분함수 $\sqrt{a^2 - x^2}$에서 $x = a \sin\theta \ \ (-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$ 로 치환

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta} = a\sqrt{1 - \sin^2\theta} = a\sqrt{\cos^2\theta} = a\cos\theta$$



$\frac{x}{a} = \sin\theta, \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \cos\theta$이므로

$$a\cos\theta = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$a\sin\theta = x$$

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

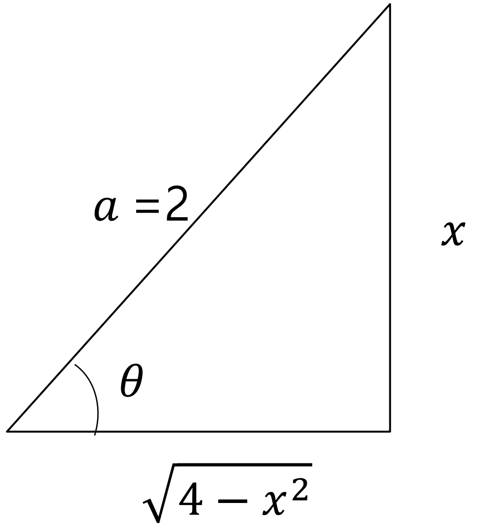
<예제> $\sqrt{a^2-x^2}$ 포함하는 적분

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad a=2\text{에 해당함}$$

$$x = 2\sin\theta\,, \qquad dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{2\cos\theta}{(2\sin\theta)^2\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta\sqrt{4-\sin^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta\, 2\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta$$

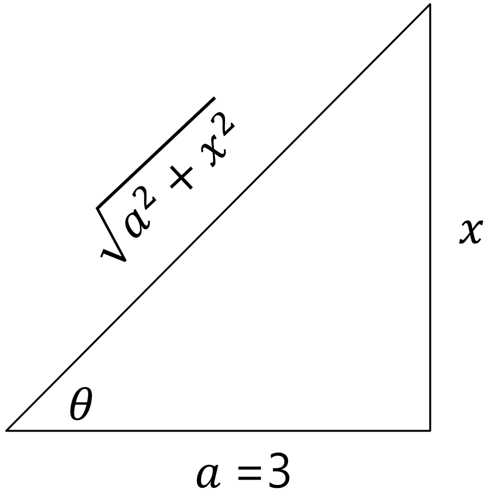
$$= \int \frac{\cos\theta}{4\sin^2\theta\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\cot\theta + c = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c$$



$$\sin\theta = \frac{x}{2} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

<예제> $\sqrt{a^2+x^2}$ 포함하는 적분



$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{a} \qquad x = a\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)} = a\sec\theta = a\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right) = \sqrt{a^2+x^2}$$

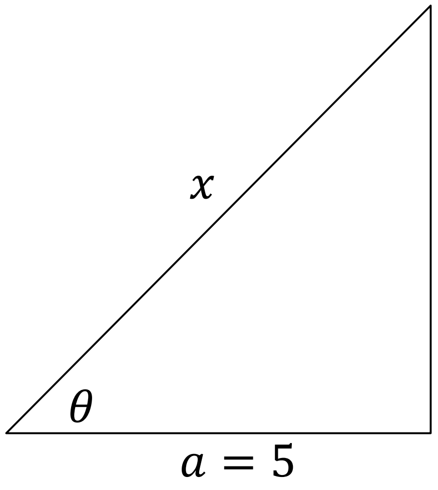
$$x = 3\tan\theta$$
$$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx = \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}}d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sqrt{1+\tan^2\theta}}d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c = \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} + \frac{x}{3}\right| + c$$

Note : $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{3^2+x^2}}{3} = \sqrt{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}, \qquad \tan\theta = \dfrac{x}{3}$

<예제> $\sqrt{x^2-a^2}$ 포함하는 적분



$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{x^2-25}$$

$$\sec\theta=\frac{x}{a} \qquad \csc\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$x=a\sec\theta \qquad \tan\theta=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx \qquad x=5\sec\theta\,, \qquad dx=5\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$=\int\frac{\sqrt{(5\sec\theta)^2-25}}{5\sec\theta}(5\sec\theta\tan\theta)d\theta=\int 5\sqrt{\sec^2\theta-1}\tan\theta\,d\theta=5\int\tan^2\theta\,d\theta=5\int(\sec^2\theta-1)\,d\theta$$

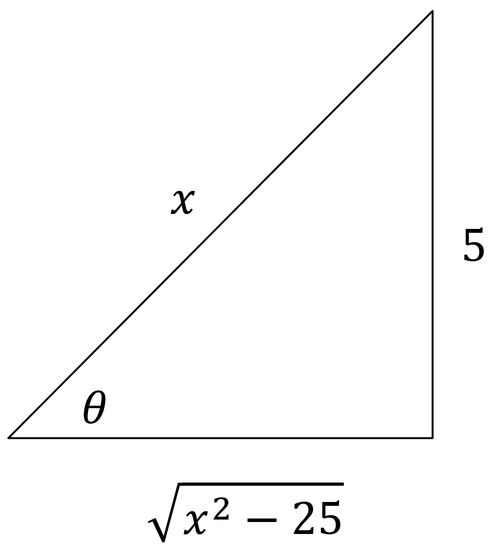
$$=5(\tan\theta-\theta)+c$$

Note : $x=5\sec\theta$ 로 부터 $\theta=\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$ 이고

$$\tan\theta=\sqrt{\sec^2\theta-1}=\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2-1}=\frac{1}{5}\sqrt{x^2-25}$$

$$=\sqrt{x^2-25}-5\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)+c$$

<예제> Alternative method for the previous problem



$$x \sin\theta = 5 \qquad x = \frac{5}{\sin\theta} = 5\csc\theta \qquad dx = -5\csc\theta\cot\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\, dx = \int \frac{\sqrt{25\csc^2\theta - 25}(-5\csc\theta\cot\theta)}{5\csc\theta}\, d\theta = -5\int \sqrt{\csc^2\theta - 1}\cot\theta\, d\theta$$

$$= -5\int \sqrt{\cot^2\theta}\cot\theta\, d\theta = -5\int \cot^2\theta\, d\theta$$

$$\boxed{\textbf{Note}: \ \cot^2\theta = \csc^2\theta - 1}$$

$$= -5\int (\csc^2\theta - 1)\, d\theta = -5[-\cot\theta - \theta] + c = 5(\cot\theta + \theta) + c$$

$$= \sqrt{x^2 - 25} + 5\csc^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + c \quad or \ \sqrt{x^2 - 25} + 5\sec^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 25}}\right) + c$$

- 6.4 부분분수를 이용한 유리함수의 적분 (Integration of Rational Functions using Partial Fractions)

<정의> p(x), q(x)가 다항식 일 때 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$를 유리함수라고 한다

$$\int \frac{x-19}{x^2-3x-10}dx = \int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5}\right)dx = 3\ln|x+2| - 2\ln|x-5| + c$$

피적분함수의 부분분수식

(case A)

$$\frac{a_1x+b_1}{(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)} = \frac{A}{a_2x+b_2} + \frac{B}{a_3x+b_3}$$

여기에서 $a_1x+b_1, a_2x+b_2, a_3x+b_3$가 모두 다르다
(즉, 어떤 것도 나머지 것의 상수배가 아님)

<예제> 서로 다른 일차항

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$$

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$ 양변에 $(x$ -1)$(x$ +2)를 곱한다

$1 = \mathrm{A}(x+2) + \mathrm{B}(x-1)$ 이 방정식은 모든 x 에 대하여 성립한다

$$when, x = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = 3A + 0B = 3A \quad \rightarrow \therefore A = \frac{1}{3}$$

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad 1 = 0A + (-3)B = -3B \quad \rightarrow \therefore B = -\frac{1}{3}$$

$$Thus, \qquad \int \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2}\right)\right]dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + c$$

(case B)

$$\frac{p(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)} = \frac{c_1}{a_1x+b_1} + \frac{c_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{c_n}{a_nx+b_n}$$

여기에서 p(x)의 차수가 n보다 작고, 분모의 인수들 $a_ix + b_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$이 모두 다르다

<예제> 세개의 서로 다른 일차항

$$\int \frac{3x^2 - 7x - x}{x^3 - x} dx$$

$$\frac{3x^2 - 7x - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$ 양변에 $x(x$ -1)(x +1)을 곱한다

$$3\mathrm{x}^2 - 7\mathrm{x} - 2 = \mathrm{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}$$

$$when,\ x = 0 \quad \rightarrow \quad -2 = A(-1)(1) = -A \quad \rightarrow \quad \therefore A = 2$$

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad B = -3$$

$$x = -1 \quad \rightarrow \quad C = 4$$

$$Thus, \qquad \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}\right) dx = 2\ln|x| - 3\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + c$$

<예제> 분자의 차수가 분모의 차수보다 높은 경우는 나눗셈이 필요함

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\,dx$$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & \quad\quad\quad 2x \\
x^2 - 2x - 8 & \overline{\big)\,2x^3 - 4x^2 - 15x + 5} \\
 & \underline{\;\;2x^3 - 4x^2 - 16x \quad\;\;}\;\text{(-} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad x + 5
\end{array}$$

$$2x + \frac{x+5}{x^2 - 2x - 8} = 2x + \frac{3/2}{x-4} + \frac{-1/2}{x+2}$$

$$Thus, \qquad \int \left[2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}\right)\right] dx = x^2 + \frac{3}{2}\ln|x-4| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + c$$

(case C) $$\frac{p(x)}{(ax+b)^n} = \frac{c_1}{ax+b} + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(ax+b)^n}$$

$p(x)$의 차수가 n보다 작고 분모가 $(ax+b$의 n제곱), 즉 $(ax+b)^n$

<예제> 분모가 일차항의 제곱이 있는 부분분수

$$f(x) = \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

양 변에 $x(x+1)^2$을 곱한다

$$5x^2+20x+6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$When,$ $x=0,$ $A=6$

$x=-1,$ $C=9$

$Choose\ any\ value$ $x=1,$ $B=-1$

$$Thus, \quad \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \int \left[\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}\right] dx = \ln|6| - \ln|x+1| - 9(x+1)^{-1} + c$$

(case D) p(x)의 차수가 2n보다 작고, 분모가 인수분해 되지않는 2차식 포함

$$\frac{p(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

Note : 치환에 의해 쉽게 적분가능

$$=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

<예제>

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}=\frac{2x^2-5x+2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

양변에 $x(x^2+1)$을 곱한다

$$2x^2-5x+2=A(x^2+1)+(Bx+C)x=(A+B)x^2+Cx+A$$

x의 같은 차수에 대한 양변을 비교한다

$$2=A+B,\qquad -5=C,\qquad 2=A,\qquad \therefore B=0$$

$$Thus,\qquad \int\frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2+1}\right)dx=2\ln|x|-5\tan^{-1}x+c$$

<예제> $\dfrac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \dfrac{A}{(x+2)} + \dfrac{Bx+C}{(x^2+2x+5)}$ 양변에 $(x+2)(x^2+2x+5)$를 곱한다

$$5x^2+6x+2 = A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x+2)$$

양변에서 x의 같은 차수의 계수를 비교하면

$5 = A+B,\quad 6 = 2A+2B+C,\quad 2 = 5A+2C \qquad \therefore A=2,\quad B=3,\quad C=-4$

$Now,\quad \displaystyle\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}dx = \int\left(\frac{2}{x+2}+\frac{\mathbf{3x-4}}{\mathbf{x^2+2x+5}}\right)dx$ 두번째 항 적분

$$\int \frac{\mathbf{3x-4}}{\mathbf{x^2+2x+5}}dx = \int\left[\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} - \frac{7}{x^2+2x+5}\right]dx = \frac{3}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}dx - \int\frac{7}{x^2+2x+5}dx$$

$= \dfrac{3}{2}\ln|x^2+2x+5| - \displaystyle\int\frac{7}{x^2+2x+5}dx$ 두번째 항 적분

$$\int\frac{7}{x^2+2x+5}dx = \int\frac{7}{(x+1)^2+4}dx = \frac{7}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx = \frac{7}{4}(2)\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

$Thus,\quad \displaystyle\int\frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}dx = 2\ln|x+2| + \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{7}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$

- 6.5 적분표 : 교과서의 부록에 있는 적분표(적분공식)를 이용한다

<예제> 치환 및 적분공식 $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + c$

$$\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(2x)^2}}{2x}2dx \qquad u = 2x, \quad du = 2dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+u^2}}{u}du = \sqrt{3+u^2} - \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+u^2}}{u}\right| + c = \sqrt{3+4x^2} - \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+4x^2}}{2x}\right| + c$$

<예제> 점화식 적분공식의 이용

점화식 적분공식 : $\int \sin^6 x\, dx \quad = \int \sin^n u\, du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\, du$

$when\ n = 6, \qquad \int \sin^6 x\, dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\, dx$

두번째 항 적분 $when\ n = 4, \quad \int \sin^4 x\, dx \ = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\, dx$

두번째 항 적분 $when\ n = 2, \int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2} sin\, x \cos x + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2} sin\, x \cos x + \frac{1}{2}x$

$$Thus, \qquad \int \sin^6 x\, dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x \cos x - \frac{5}{16}\sin x \cos x + \frac{5}{16}x + c$$

<예제> 치환하고 점화식 이용

점화식 적분공식: $\int u^n \sin u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du,\ \int u^n \cos u\,du = u^n \sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$

$$\int x^3 \sin 2x\,dx \qquad n = 3, \qquad u = 2x \ \rightarrow\ du = 2dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x)^3}{2^3}\sin 2x\,(2)dx = \frac{1}{16}\int u^3 \sin u\,du = \frac{1}{16}\left(-u^3\cos u + 3\int u^2\cos u\,du\right)$$

두번째 항 점화식 적분공식 적용: $\int u^2 \cos u\,du = u^2\sin u - 2\int u\sin u\,du$

두번째 항 점화식 적분공식 적용: $\int u\sin u\,du = -u\cos u + \int \cos u\,du$

$$= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}u^2\sin u + \frac{3}{8}u\cos u - \frac{3}{8}\sin u + c$$

$$= -\frac{1}{16}(2x)^3\cos(2x) + \frac{3}{16}(2x)^2\sin(2x) + \frac{3}{8}(2x)\cos(2x) - \frac{3}{8}\sin(2x) + c$$

$$Thus, \qquad \int x^3\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^3\cos(2x) + \frac{3}{4}x^2\sin(2x) + \frac{3}{4}x\cos(2x) - \frac{3}{8}\sin(2x) + c$$

<예제> 치환하고 적분표 이용

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}dx$$

$\sin 2x$를 이배각 공식을 이용하여 변형 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$= \int \frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{4\cos x - 1}}dx$$

$u = \cos x$, $du = -\sin x\, dx$로 치환한다

$$= -2\int \frac{u}{\sqrt{4u - 1}}du$$

적분공식 이용 : $\int \frac{u}{\sqrt{a + bu}}du = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + c$

$(where, \quad a = -1, \quad b = 4)$

$$= (-2)\frac{2}{3(4)^2}(4u + 2)\sqrt{4u - 1} + c$$

$$= -\frac{1}{12}(4\cos x + 2)\sqrt{4\cos x - 1} + c$$

<연습문제 6.5> 적분표를 이용하여 적분하라

<문제 2>

$$\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}dx \qquad u=1+e^x \ \rightarrow e^x=u-1, \qquad du=e^x dx$$

$$=\int e^x\sqrt{1+e^x}\,e^x dx=\int (u-1)\sqrt{u}du=\int \left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{5}(1+e^x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{15}\left[3(1+e^x)^{\frac{5}{2}}-5(1+e^x)^{\frac{3}{2}}\right]+c \ =\frac{2}{15}\left[(1+e^x)^{\frac{3}{2}}(3(1+e^x)-5)\right]+c$$

$$=\frac{2}{15}(1+e^x)^{\frac{3}{2}}(3e^x-2)+c$$

<문제 14>

$$\int e^x \tan^{-1}(e^x)\,dx \qquad\qquad u = e^x, \qquad du = e^x dx$$

$$= \int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + c = e^x \tan^{-1} e^x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c$$

$$(prof) \quad \frac{d}{dx}\left(e^x \tan^{-1} e^x - \frac{1}{2}\ln(1+(e^x\,)^2) + c\right) = e^x \tan^{-1} e^x + \frac{e^x \cdot e^x}{1+(e^x)^2} - \frac{1}{2}\frac{2e^x \cdot e^x}{1+(e^x)^2}$$

$$= e^x \tan^{-1} e^x$$