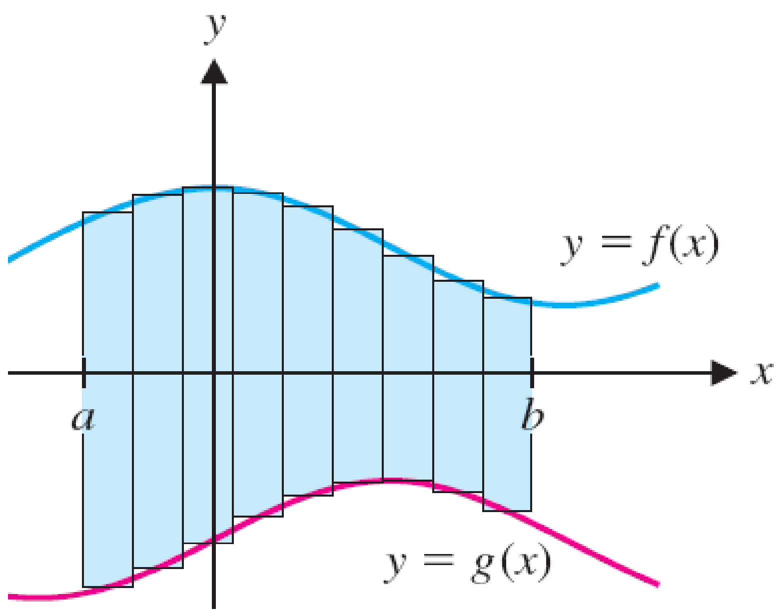
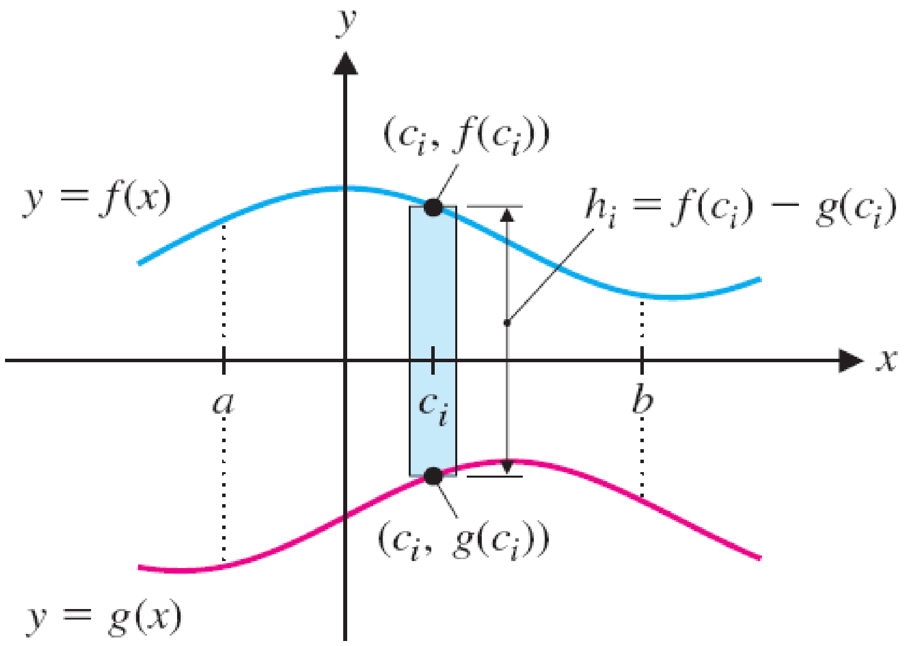
Chapter 5 정적분의 응용

- 5.1 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이





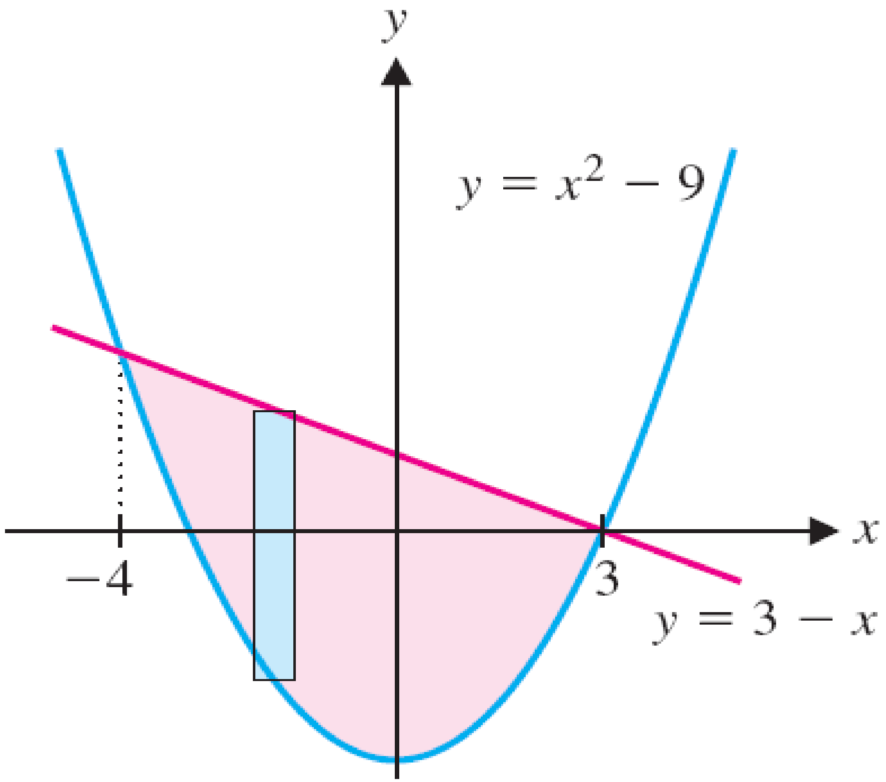
구간 a≤ x ≤b에서 연속인 함수 f(x), g(x)가 f(x)≥g(x)를 만족할 때 곡선 사이의 넓이는

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(c_i) - g(c_i)]\Delta x \ = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

(참고) $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두근

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<예제> 함수 $y = 3 - x$와 $y = x^2 - 9$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라



Equate two equations

$$3 - x = x^2 - 9$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

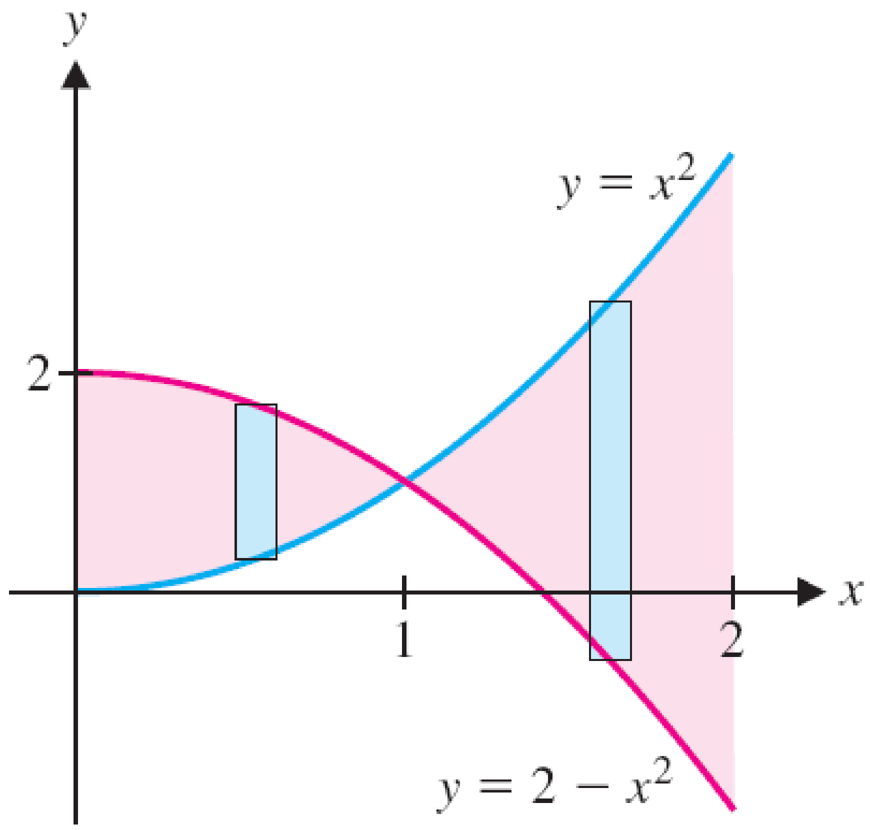
$$\therefore x = 3, -4$$

$$A = \int_{-4}^{3} [(3-x) - (x^2 - 9)]\,dx = \int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-4}^{3} = \frac{343}{6}$$

<예제> 교차하는 두 곡선 사이의 영역의 넓이

구간 0≤x≤2에서 $y = x^2$과 $y = 2 - x^2$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라



Equate two equations

$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow 2(x^2 - 1) = 2(x+1)(x-1) = 0$

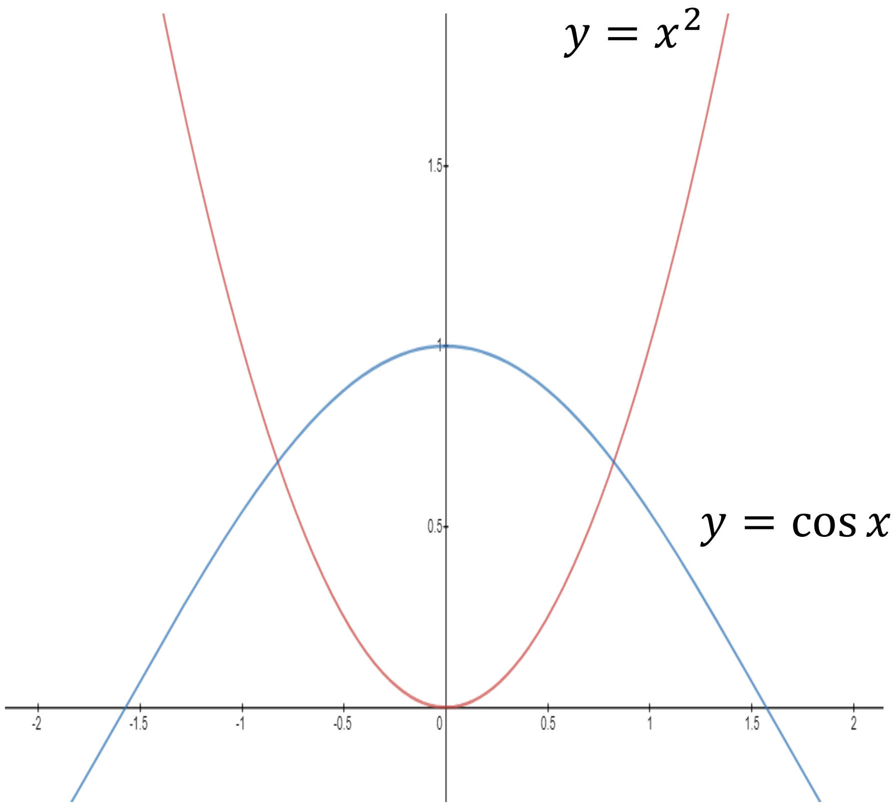
$\therefore x = 1, -1$이다 그러나 x=1만이 0≤x≤2 안에 있다

$$A = \int_0^1 [(2 - x^2) - x^2]\, dx + \int_1^2 [x^2 - (2 - x^2)]\, dx$$

$$= \int_0^1 (2 - 2x^2)\, dx + \int_1^2 (2x^2 - 2)\, dx = 4$$

<예제> 두 곡선의 교차점을 정확히 알 수 없는 경우

$y = \cos x$ 와 $y = x^2$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이



$\cos x = x^2 \Rightarrow \cos x - x^2 = 0$의 근을 구하기 위해서는

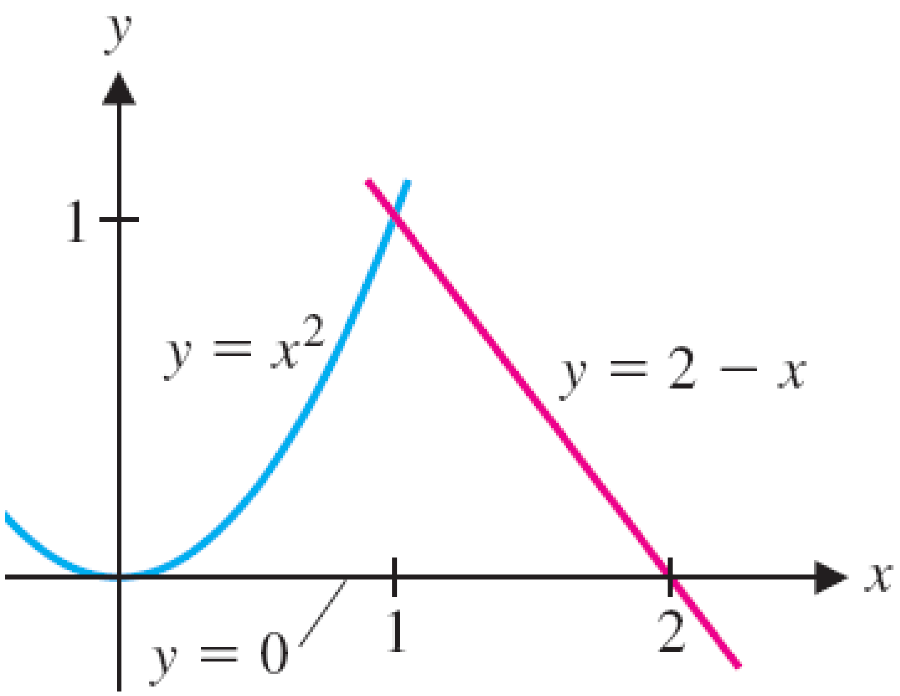
Newton-Raphson Method 을 사용함
(근사점화수열 : Successive Approximation)

$$x \cong \pm 0.8241$$

$$A \approx \int_{-0.8241}^{0.8241} (\cos x - x^2) dx \approx 1.09475$$

<예제> 세 곡선에 의해 둘러싸인 영역의 넓이

$$y = x^2, \qquad y = 2 - x, \qquad y = 0$$



$$x^2 = 2 - x \Rightarrow \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - 2 = (\mathrm{x} + 2)(\mathrm{x} - 1) = 0$$

$\therefore x = -2, 1$ (x=1이 교차점이 된다)

$$2 - \mathrm{x} = 0, \qquad \therefore x = 2$$

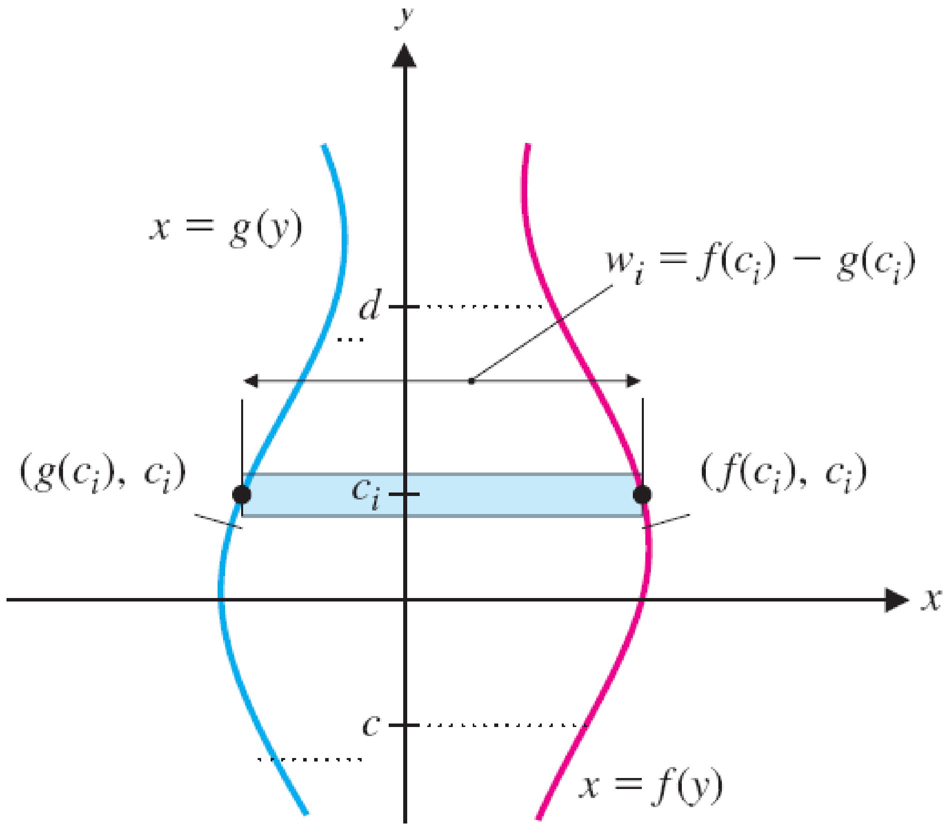
$$A = \int_0^1 (x^2 - 0)\,dx + \int_1^2 [(2 - x) - 0]\,dx$$

$$= \frac{5}{6}$$

- y에 관한 적분으로 넓이 구하기

구간 c≤ y ≤d에서 연속인 함수 f(y), g(y)가 f(y)≥g(y)을 만족할 때

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(c_i) - g(c_i)]\Delta y = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

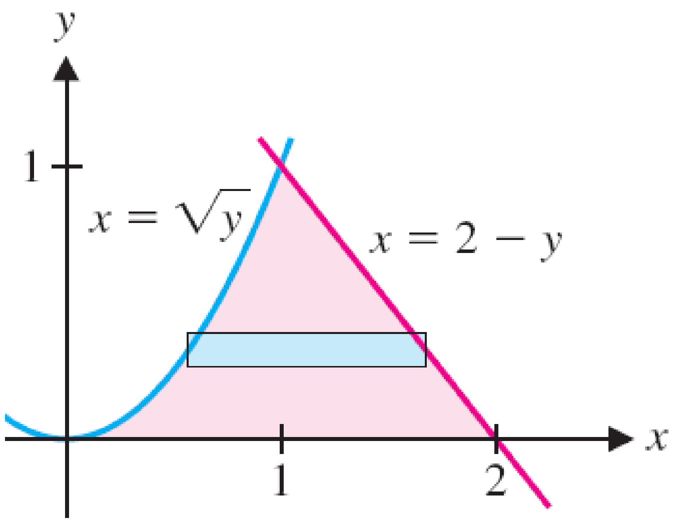


<예제> $y = x^2, y = 2 - x, y = 0$으로 둘러싸인 영역 넓이를 y에 관하여 적분해서 구한다

변형 $x = \sqrt{y}, x = 2 - y \quad \sqrt{y} = 2 - y \Rightarrow y = (2 - y)^2 = y^2 - 4y + 4$

$\therefore y^2 - 5y + 4 = (y - 4)(y - 1) = 0 \quad y = 1{,}4$ (y=1만 가능)

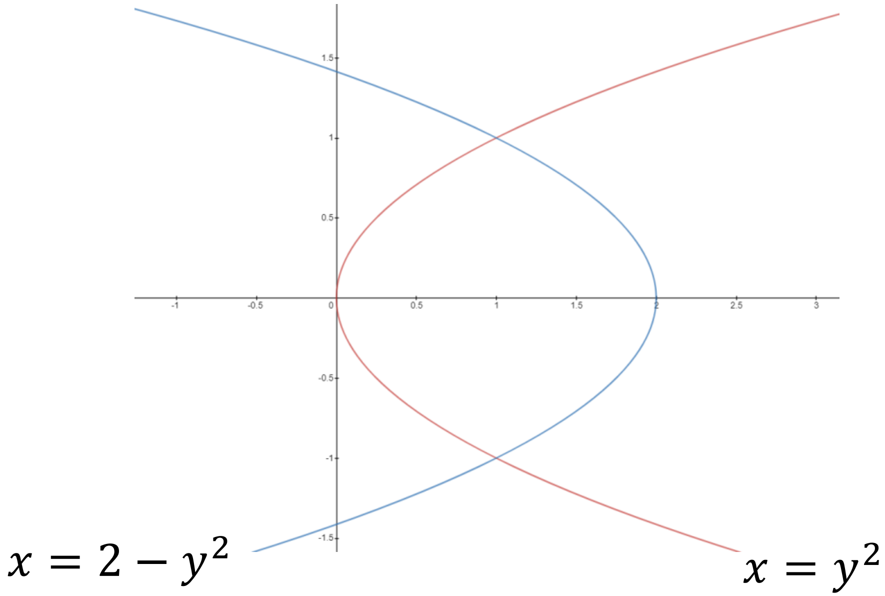
$$A = \int_0^1 [(2 - y) - \sqrt{y}]\, dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{5}{6}$$



<예제> $x = y^2$과 $x = 2 - y^2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라

$$y^2 = 2 - y^2 \Rightarrow 2(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$A = \int_{-1}^1 [(2 - y^2) - y^2] dy = \int_{-1}^1 (2 - 2y^2)\, dy = \frac{8}{3}$$



<연습문제 5.1> 두 함수의 그래프를 그리고 두 곡선 사이의 넓이를 정적분으로 구하라

< 문제 3>

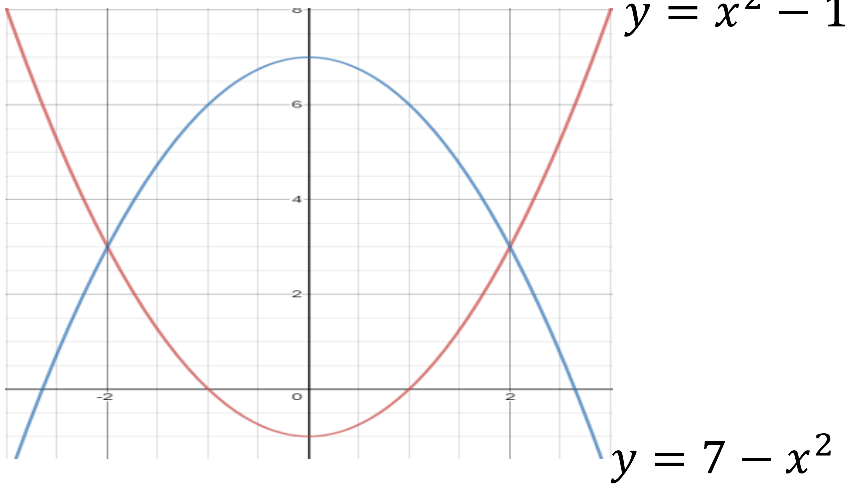
$y = x^2 - 1, \qquad y = 7 - x^2$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 7 - x^2$

$\Rightarrow 2x^2 = 8 \quad \Rightarrow x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} [(7 - x^2) - (x^2 - 1)]\, dx = \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}$$



< 문제 5>

$y = 4xe^{-x^2}, \qquad y = |x|$

$\Rightarrow 4xe^{-x^2} = x$

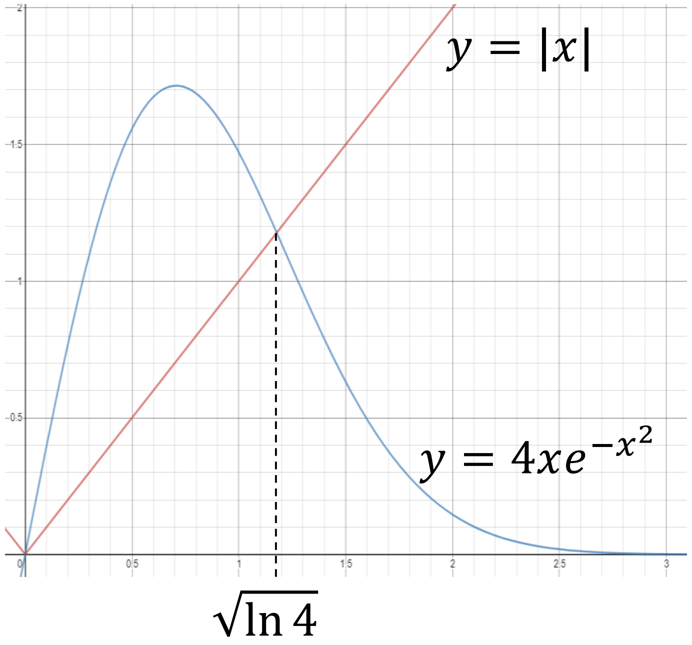
$\Rightarrow 4 = e^{x^2}$

$\Rightarrow \ln 4 = \ln e^{x^2} = x^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{\ln 4}$

(치환법 이용 가능 $\;-x^2 = du \Rightarrow \;$ $-2x\, dx = du$)

$$A = \int_{0}^{\sqrt{\ln 4}} (4xe^{-x^2} - x)\, dx = \left[-2e^{-x^2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\ln 4}} = \frac{3 - \ln 4}{2}$$



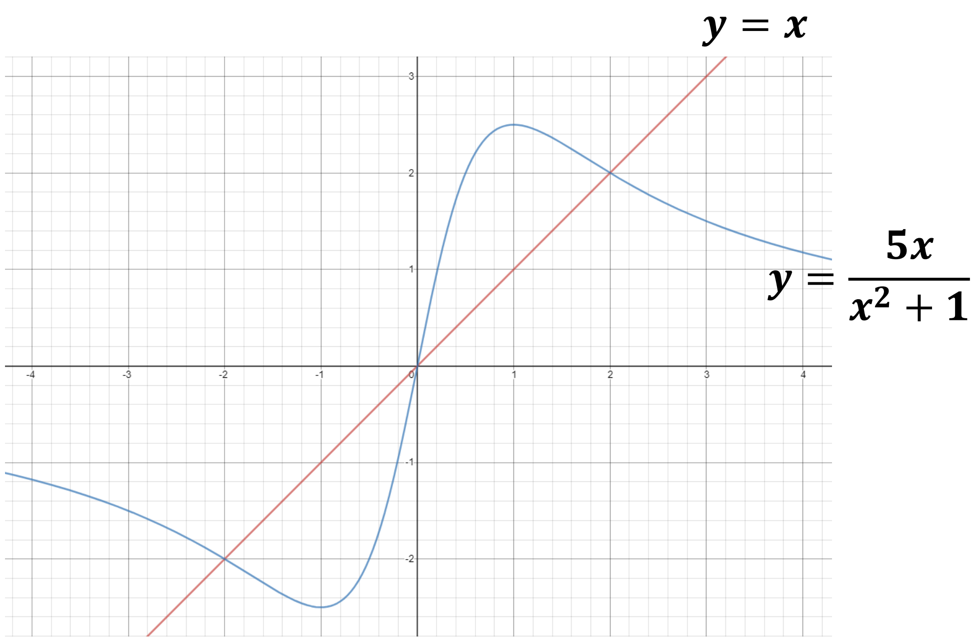
<문제 6>

$$y=\frac{5x}{x^2+1},\qquad y=x \qquad\qquad \therefore x^2=4 \;\Rightarrow\; x=\pm 2$$

$$A=\int_{-2}^{0}\left[x-\frac{5x}{x^2+1}\right]dx+\int_{0}^{2}\left[\frac{5x}{x^2+1}-x\right]dx$$

$$=2\int_{0}^{2}\left[\frac{5x}{x^2+1}-x\right]dx=2\left(\frac{5}{2}\ln|x^2+1|-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$=5[\ln 5-\ln 1]-[4-0]=5\ln 4-4$$



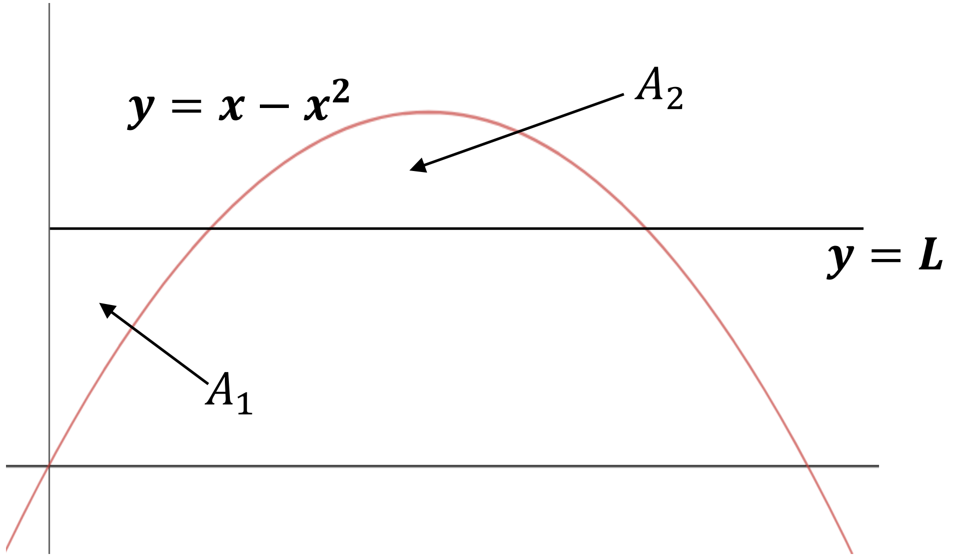
<문제 17>

$y=x-x^2$에 대하여 아래 그림에서 $A_1=A_2$가 되도록 L 값을 구하라

$$x-x^2=L \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4L}}{2} \qquad\qquad A_1=A_2 \quad \therefore L=\frac{16}{3}$$

$$A_1=\int_{0}^{\frac{1-\sqrt{1-4L}}{2}}[L-(x-x^2)]\,dx=\left(Lx-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{1-\sqrt{1-4L}}{2}}$$

$$A_2=\int_{\frac{1-\sqrt{1-4L}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4L}}{2}}[(x-x^2)-L]\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-Lx\right)\Big|_{\frac{1-\sqrt{1-4L}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4L}}{2}}$$

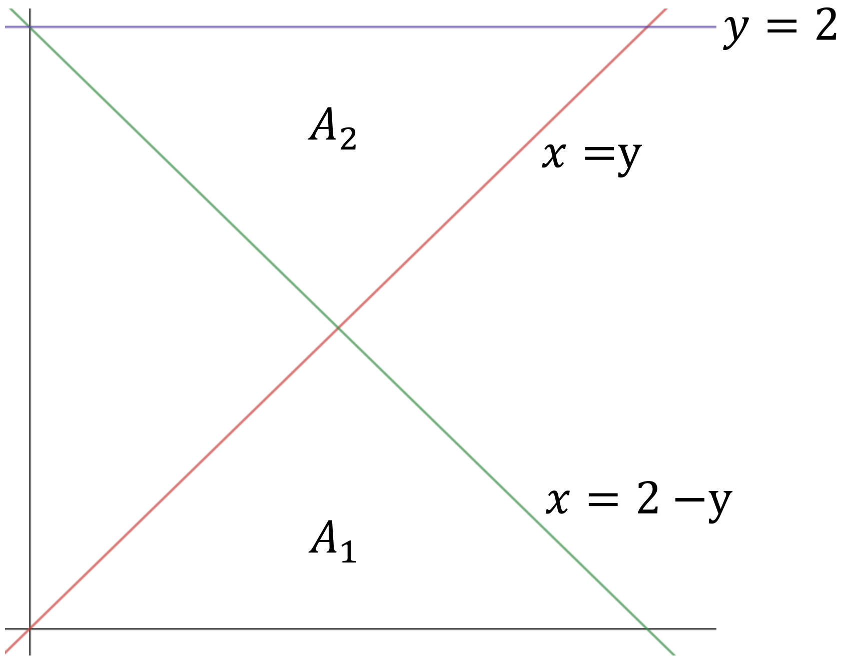


<문제 10> $y = x,\ y = 2 - x,\ y = 2, y = 0$로 둘러싸인 넓이를 구하라

$y = x, \qquad y = 2 - x, \qquad y = 2$

$$A_1 = \int_0^1 [(2 - y) - y]\, dy = (2y - y^2)\Big|_0^1 = 1$$

$$A_2 = \int_1^2 [y - (2 - y)]\, dy = \int_1^2 (2y - 2)\, dy = (y^2 - 2y)\Big|_1^2 = 1$$

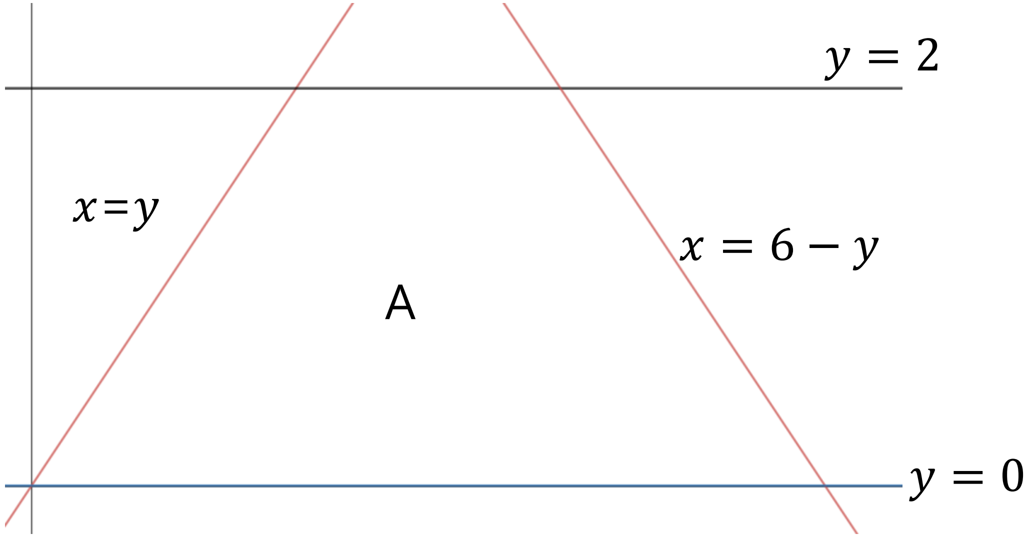


<Extra Problem>

$y = x,\ y = 6 - x,\ y = 2,\ y = 0$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라

$y = x, \qquad y = 6 - x, \qquad y = 2, \qquad y = 0$

$$A = \int_0^2 [(6 - y) - y]\, dy = \int_0^2 (6 - 2y)\, dy = [6y - y^2]_0^2 = 8$$



<Extra Problem>

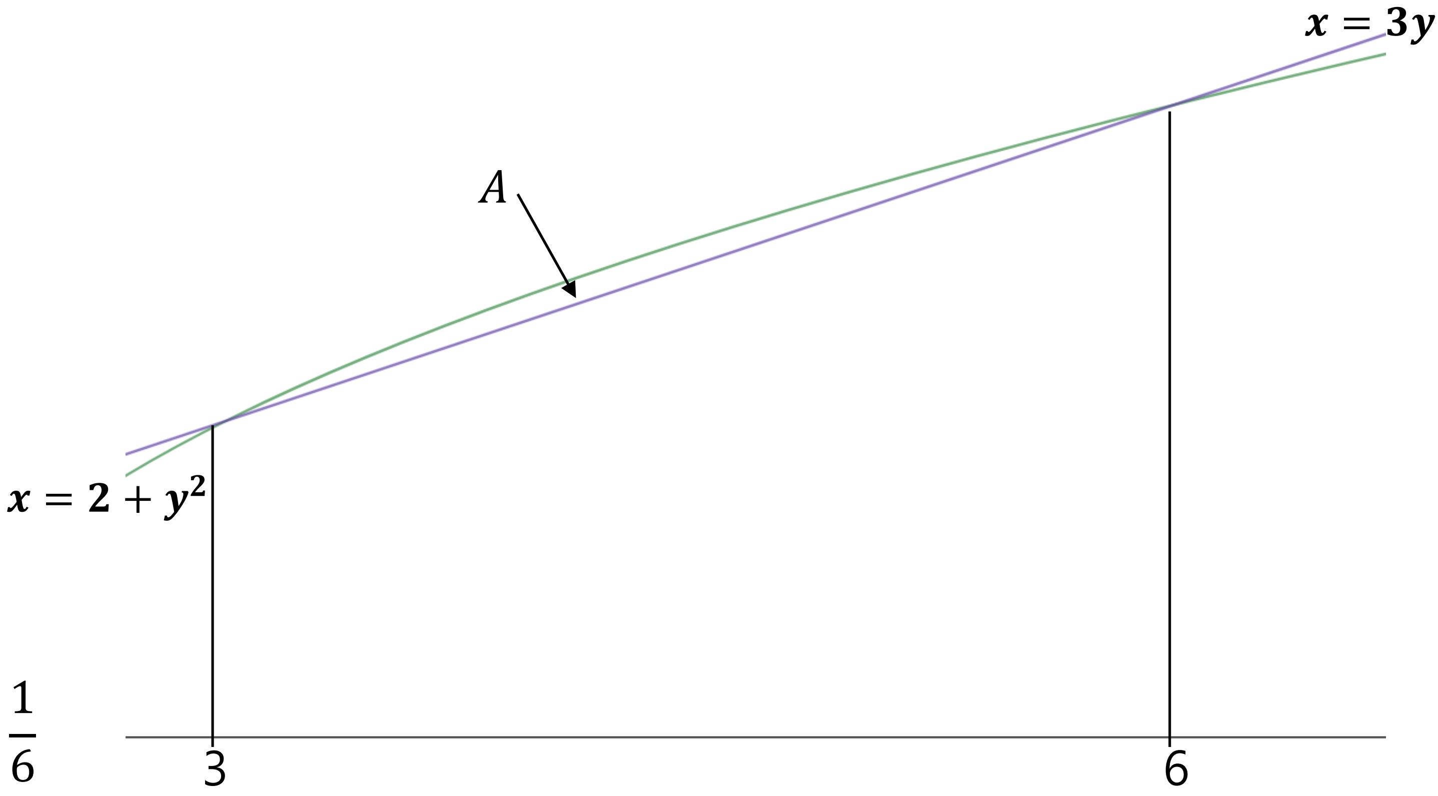
$x = 3y, \qquad x = 2 + y^2$

Equate two equations to obtain

$y^2 - 3y + 2 = (y-2)(y-1) = 0$

$\therefore\ y = 1, 2$

$$A = \int_1^2 [3y - (2 + y^2)]\,dy = \left(\frac{3}{2}y^2 - 2y - \frac{y^3}{3}\right)_1^2 = \frac{1}{6}$$



- 5.2 부피

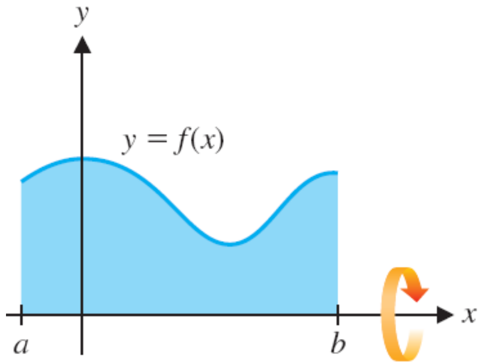
단면의 넓이가 A(x)인 물체의 부피

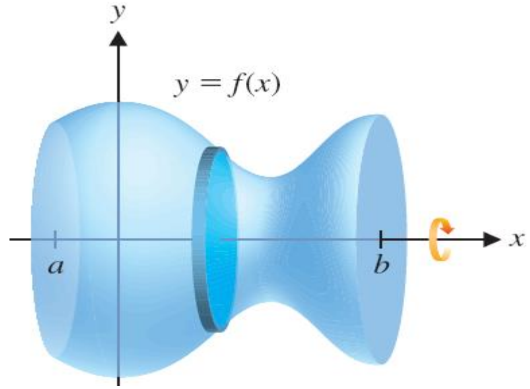
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

- 원판법 (The Method of Disks)

구간 [a, b]에서 y=f(x) 그래프를 x축(수평축)으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피를 구함

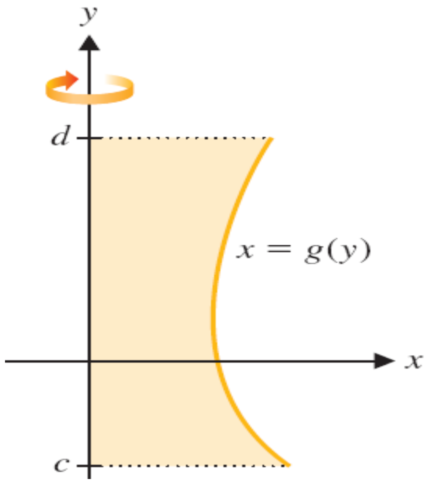
$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

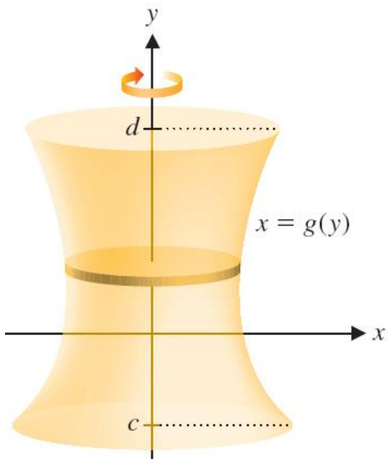




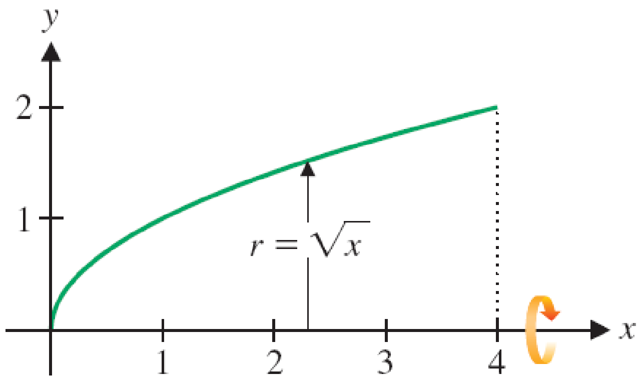
구간 [c, d]에서 x=g(y) 그래프를 y축(수직축)으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피를 구함

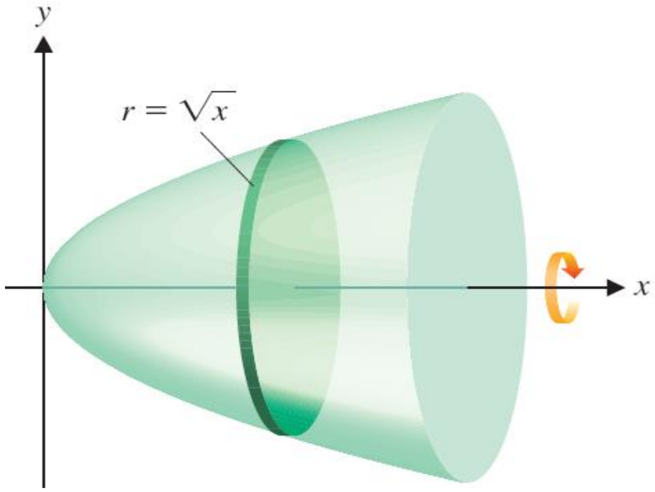
$$V = \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$





<예제> 구간 [0,4]에서 $y = \sqrt{x}$를 x축에 관하여 회전시킨 회전체의 부피를 구하라





$$V = \int_0^4 \pi\,(\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = 8\pi$$

<예제> x=0과 x=√3사이에서 y=4-x^2으로 둘러싸인 영역을 y축에 관하여 회전시킨 회전체의 부피를 구하라

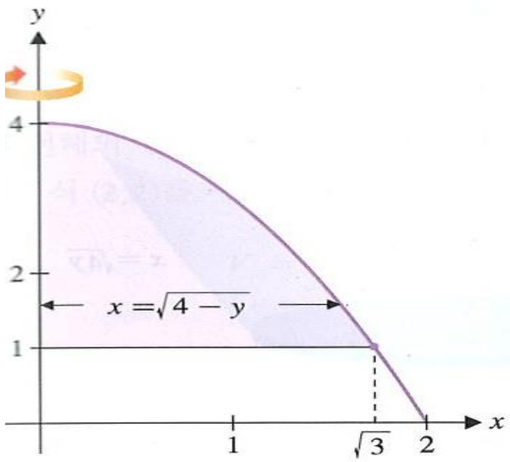


그림 5.19a $y = 4 - x^2$

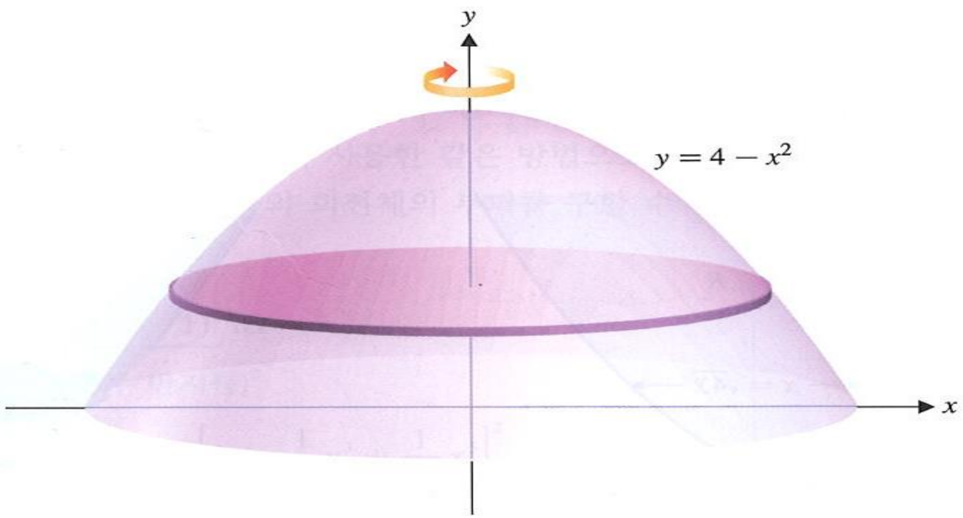


그림 5.19b 회전체

$$y = 4 - x^2 \ \Rightarrow \ x = \sqrt{4 - y}$$

$$x = 0 \ \rightarrow y = 4$$
$$x = \sqrt{3} \ \rightarrow y = 1$$

$$V = \int_1^4 \pi\left(\sqrt{4-y}\right)^2 \, dy = \pi \int_1^4 (4-y)\, dy = \pi\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_1^4 = \frac{9\pi}{2}$$

- **워셔법 (The Method of washers)** : 외부 회전체 부피 – 내부 회전체 부피

1. 회전축이 x축이나 y축이 아닌 경우
2. 회전체가 움푹파여 있는 그릇 모양이거나 내부에 구멍이 있다.

<예제> $y = \frac{1}{4}x^2$와 $x = 0, y = 1$에 둘러싸인 영역이 있다 다음의 회전축으로 회전시켰을 때 회전체의 부피를 구하라

$(\boldsymbol{a})$ $\boldsymbol{y}$축

$$V = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{4y}\right)^2 dy = \pi \int_0^1 4y\, dy = \left[4\pi \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi$$

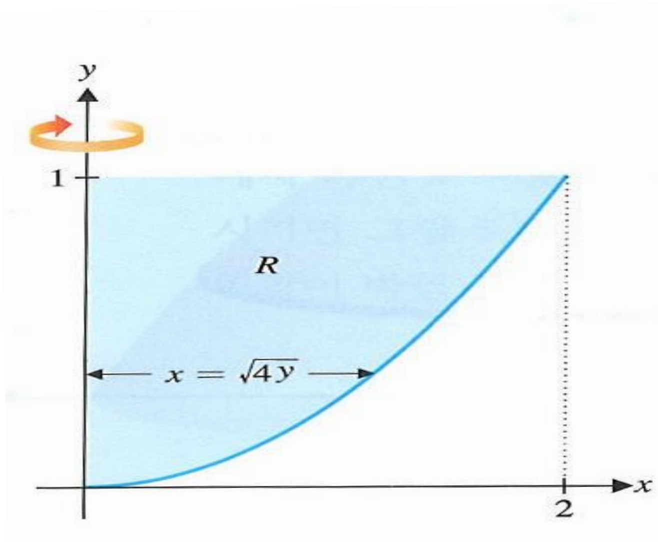


그림 5.20a $x = \sqrt{4y}$

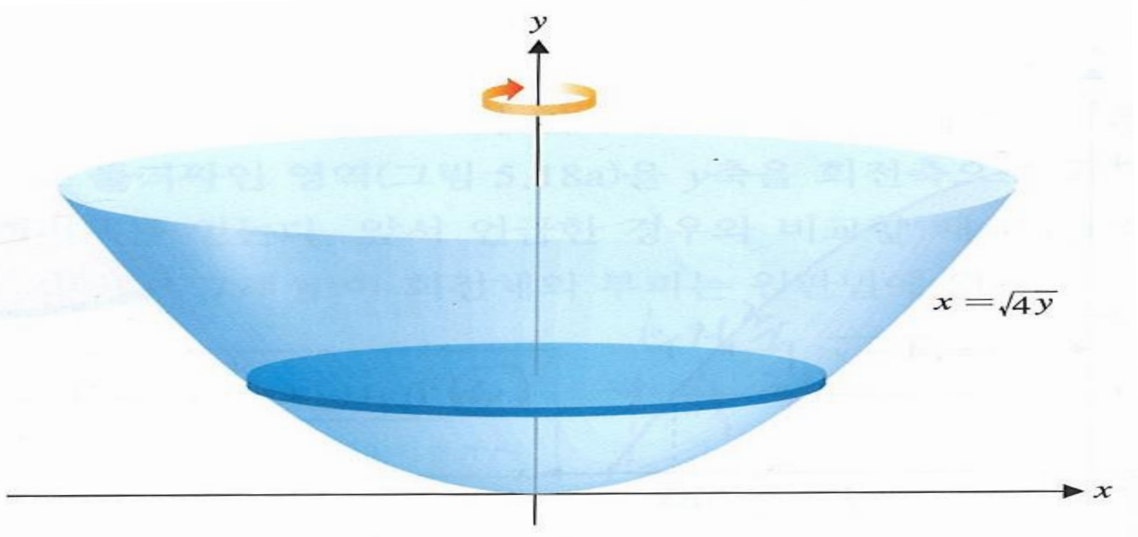
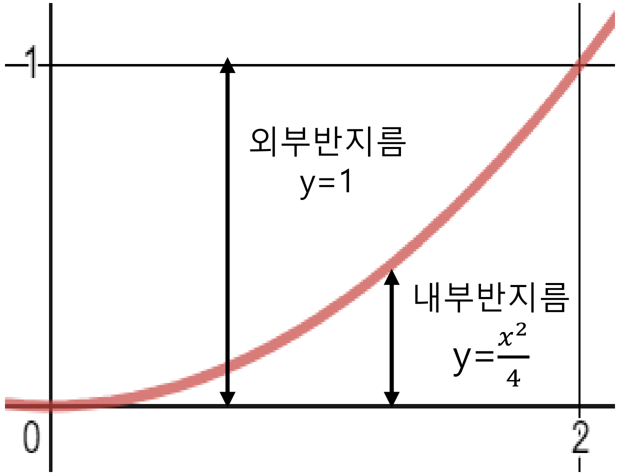
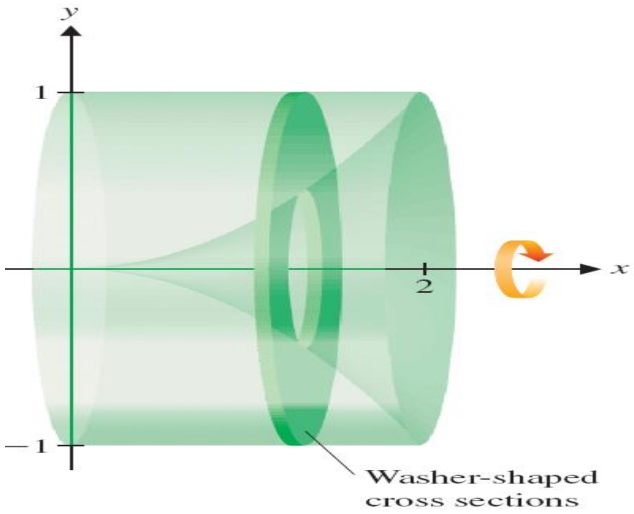


그림 5.20b 회전체

(*b*) *x*축

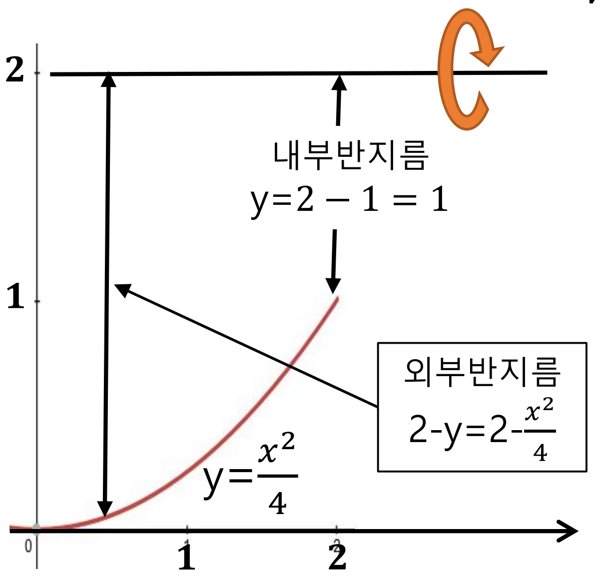
$$V=\int_0^2 \pi(1)^2\,dx-\int_0^2 \pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx=\pi\int_0^2\left(1-\frac{x^4}{16}\right)dx=\pi\left(x-\frac{x^5}{80}\right)\Big|_0^2=\frac{8}{5}\pi$$

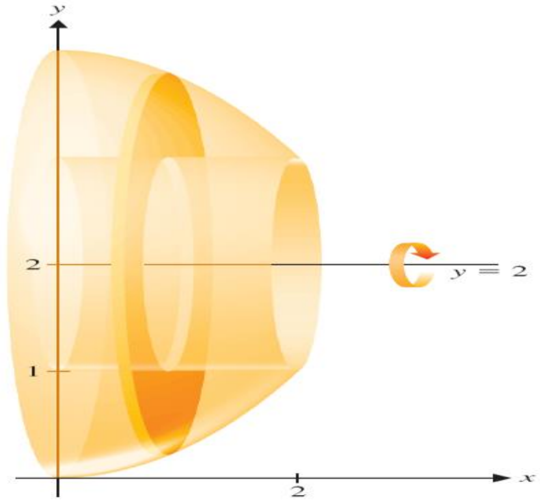




(*c*) y = 2

$$V=\int_0^2 \pi\left(2-\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx-\int_0^2 \pi(2-1)^2\,dx=\pi\int_0^2\left[\left(4-x^2+\frac{x^4}{16}\right)-1\right]dx=\frac{56}{15}\pi$$



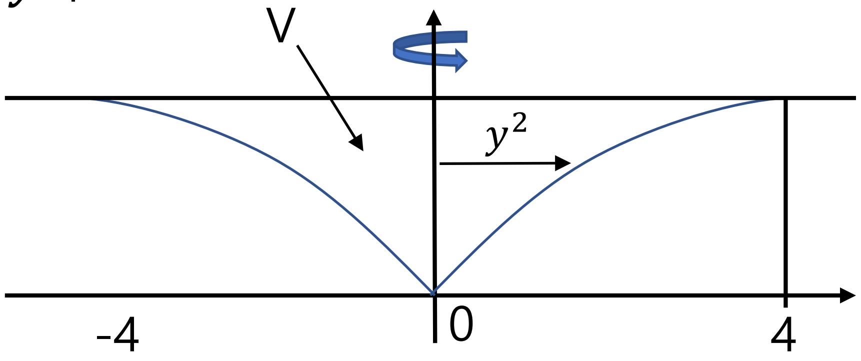


<연습문제 5.2>

<문제 9> 다음 영역을 주어진 직선에 관하여 회전시켰을 때 얻어지는 회전체의 부피를 구하라

함수 $y=\sqrt{x}$, $y=2$ 와 $x=0$로 유계된 영역

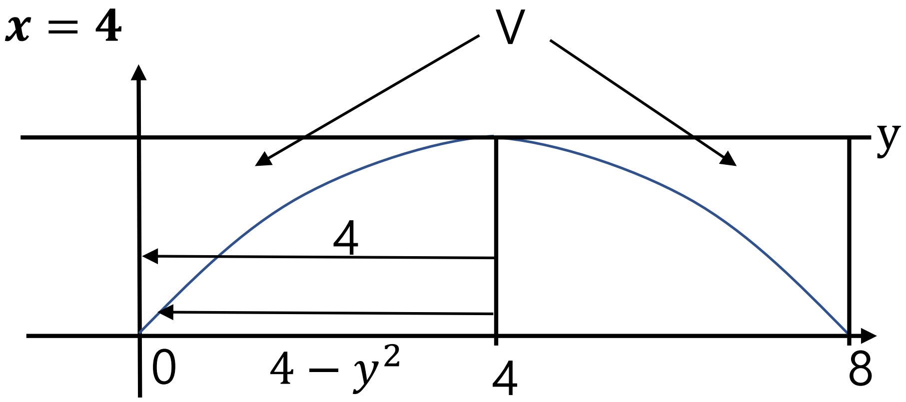
(a) y축



$x=y^2$으로 변환

$$V=\int_0^2 \pi\,(y^2)^2dy=\pi\int_0^2 y^4\,dy=\pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{32\pi}{5}$$

(b) $x=4$



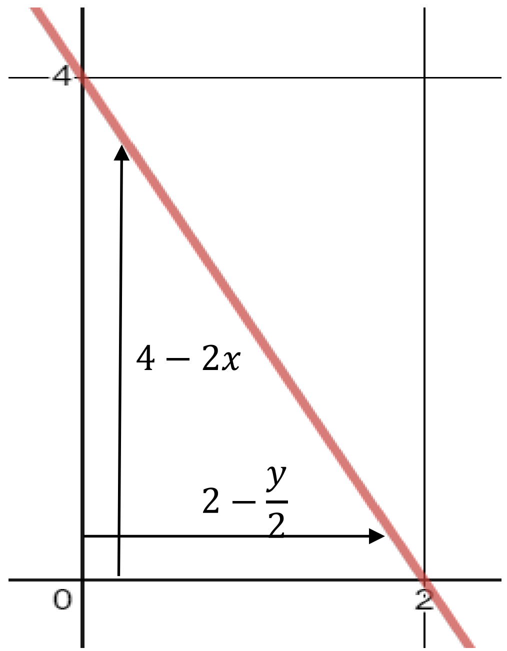
외부반지름 **내부반지름**

$$V=\int_0^2 \pi\,(4)^2dy-\int_0^2 \pi\,(4-y^2)^2dy=\pi\int_0^2(-y^4+8y^2)\,dy$$

$$=\pi\left(-\frac{y^5}{5}+\frac{8y^3}{3}\right)_0^2=\frac{224\pi}{15}$$

<문제 12> y=4-2x, x축과 y축으로 둘러싸인 영역을 R이라 할 때 R을 다음의 회전축으로 회전시킬 때 얻어지는 회전체의 부피를 구하라.

y=4-2x



함수 변형 $y=4-2x \;\; \Rightarrow \;\; x=\frac{4-y}{2}=2-\frac{y}{2}$

(a) y축 $\int_0^4 \pi\left(2-\frac{y}{2}\right)^2 \mathrm{dy} = \frac{\pi}{4}\int_0^4 (16-8y+y^2)\,dy = \frac{\pi}{4}\left[16y-16y^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{16\pi}{3}$

(b) x축 $\int_0^2 (4-2x)^2\,dx = \pi\int_0^2 (16-16x+4x^2)\,dy = \pi\left[16x-8x^2+\frac{4x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}$

(c) $y=4$ 외부반지름 내부[4-(4-2x)=2x] $\int_0^2 \pi(4)^2\,dx - \int_0^2 \pi(2x)^2\,dx = \pi\int_0^2 (16-4x^2)\,dx = \pi\left[16x-\frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{64\pi}{3}$

(d) $y=-4$ 외부 [4+(4-2x)] 내부 $\int_0^2 \pi(8-2x)^2\,dx - \int_0^2 \pi(4)^2\,dx = \pi\int_0^2 (64-32x+4x^2-16)\,dx$

$= \pi\left[48x-16x^2+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{128\pi}{3}$

(e) x = 2 외부 내부[2-($2-\frac{y}{2}$)] $\int_0^4 \pi(2)^2\,dy - \int_0^4 \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \pi\int_0^4 \left(4-\frac{y^2}{4}\right)dy = \pi\left[4y-\frac{1}{4}\frac{y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32\pi}{3}$

(f) x = −2 내부[2+($2-\frac{y}{2}$)] 내부 $\int_0^4 \pi\left(4-\frac{y}{2}\right)^2 dy - \int_0^4 \pi(2)^2\,dy = \pi\int_0^4 \left(16-4y+\frac{y^2}{4}-4\right)dy = \frac{256\pi}{3}$

- 5.3 원주각에 의한 부피 (Volumes by Cylindrical Shells)

두께가 Δx이고 반지름이 c_i인 원주각의 부피

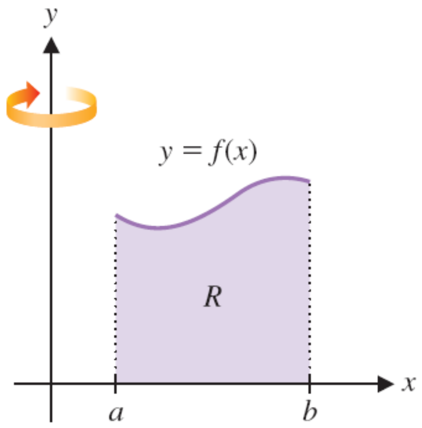
$$V_i = (2\pi c_i)\,\Delta x\; f(c_i)$$

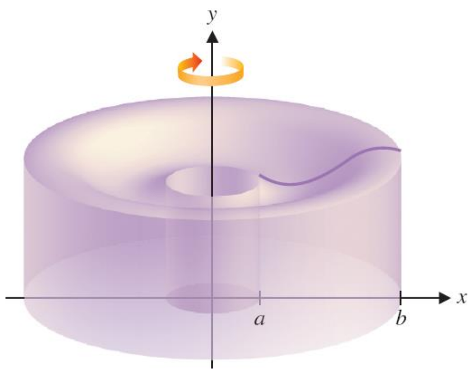
원주길이,두께,높이

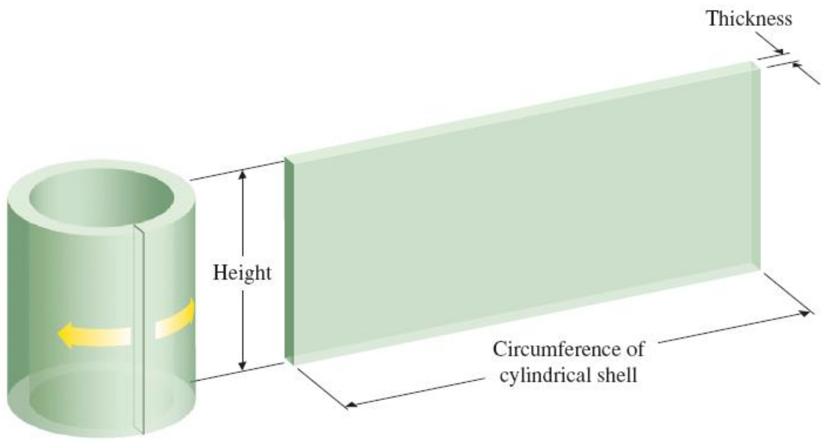
n개의 원주각의 총부피의 근사값 $$V \cong \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i f(c_i)\Delta x$$

총 부피의 참값 $$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i f(c_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

1. 원주각법에서 수평축(x축)으로 회전하면 y로 적분하고 수직축(y축)으로 회전하면 x로 적분함
2. 원판법 및 워셔법은 반대로 (변수) 적분한다



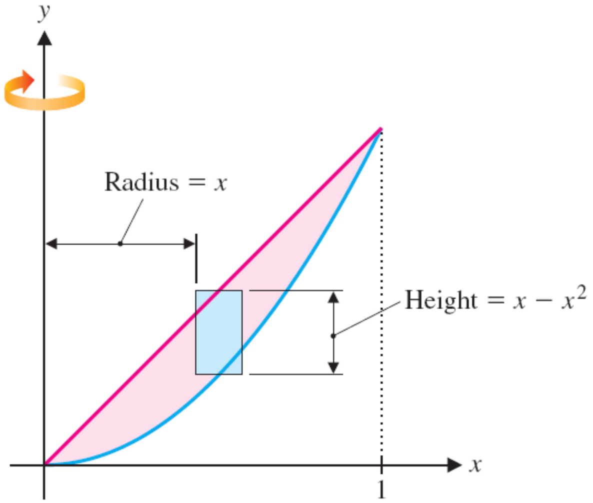




<예제> y=x와 y=x^2를 둘러싸인 영역을 y축을 회전축으로 회전시킨 회전체의 부피를 구하라

$$x = x^2 \;\rightarrow\; x = 0, 1$$

∴ x=0과 x=1 사이에서 함수 y=x에 의해 아래로 유계
함수 y=x^2 에 의해 위로 유계

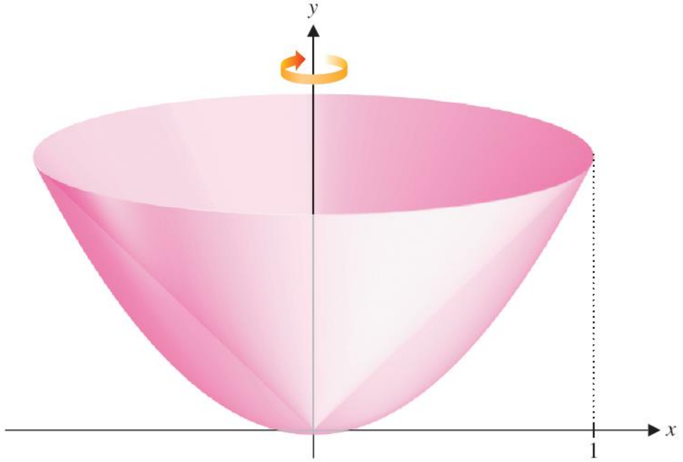


(원주각법)

$$V = \int_0^1 2\pi x\,(x - x^2)dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

(워셔법)

$$V = \int_0^1 \pi(\sqrt{y})^2\,dy - \int_0^1 \pi y^2\,dy = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 - \pi\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1$$



<원판법, 워셔법> y축에 관해 회전하면 y에 관해 적분,
x축에 관해 회전하면 x에 관해 적분

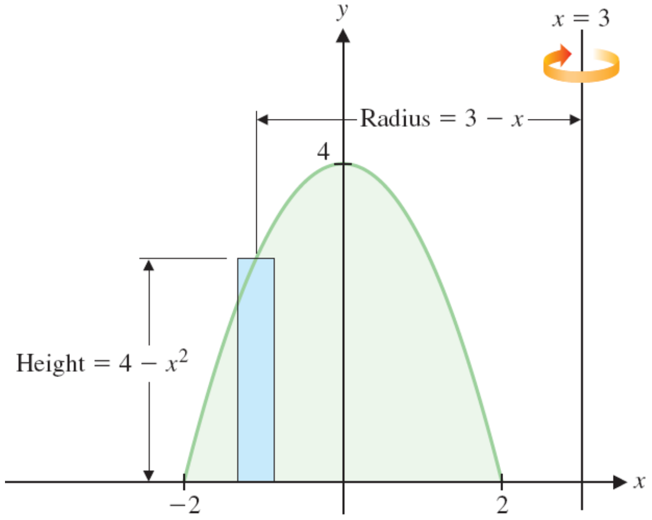
<Note> 원판법 및 워셔법에 의한 회전체의 부피는 그래프를 정확히 그리는 것이 가장 중요하며 먼저 단면의 넓이를 구한 후에 정적분을 계산한다

<예제> 워셔법보다 원주각법이 쉬운 경우

y=4-x^2과 x축으로 둘러싸인 영역을 x=3으로 회전하여 얻어진 회전체의 부피를 구하라

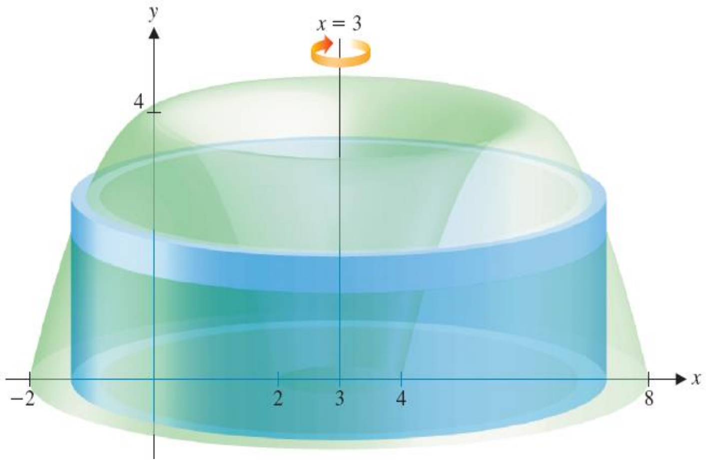
(원주각법)

$$V = \int_{-2}^{2} 2\pi(3-x)(4-x^2)\,dx = 2\pi\int_{-2}^{2}(x^3-3x^2-4x+12)\,dx = 64\pi$$



(워셔법)　　y=4-x^2 $\Rightarrow$ $x = \sqrt{4-y}$

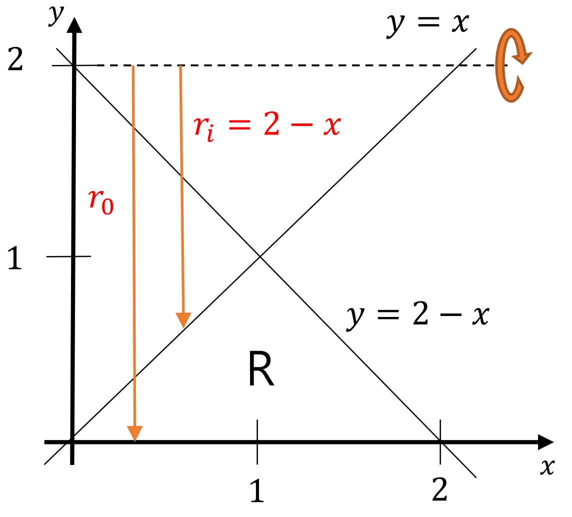
$$V = \int_{0}^{4} \pi\left(3+\sqrt{4-y}\right)^2 dy - \int_{0}^{4} \pi\left(3-\sqrt{4-y}\right)^2 dy = 64\pi$$



<Note> 부피를 계산할 때 가장 먼저 고려할 점은 x축에 관하여 적분하는 것이 쉬운지 y축에 관하여 적분하는 것이 쉬운지를 결정하는 일이다.

<예제> 원주각과 워셔법을 이용한 부피 계산

$y = x, y = 2 - x, y = 0$으로 둘러싸인 영역이 있다 이영역을 (a) y=2 (b) y=-1 (c) x=3을 회전축으로 회전시킨 회전체의 부피를 구하라



(a) 원주각법

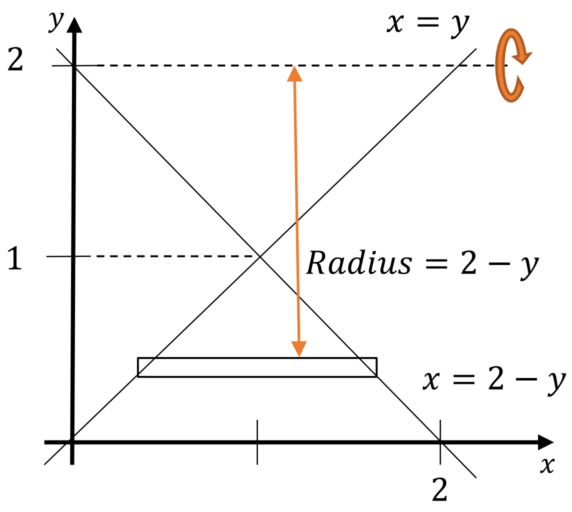
$$y = x \;\rightarrow x = y$$
$$y = 2 - x \;\rightarrow x = 2 - y$$

$$\therefore y = x - 2 \;\rightarrow y = 1(\text{교차점})$$

$$V = \int_0^1 2\pi(2-y)\big((2-y)-y\big)\,dy = 2\pi\int_0^1 (2-y)(2-2y)\,dy$$

$$= 4\pi\int_0^1 (2-y)(1-y)\,dy = 4\pi\int_0^1 (y^2-3y+2)\,dy = 4\pi\left[\frac{y^3}{3} - \frac{3}{2}y^2 + 2y\right]_0^1 = \frac{10}{3}\pi$$

(a) 워셔법 X=1에서의 대칭을 이용한다



내부반지름 $r_i = 2 - x \quad \rightarrow A$

외부반지름 $r_i = 2 - (2 - x) \rightarrow B$

$$A + B = \int_0^1 \pi 2^2\,dx - \int_0^1 \pi(2-x)^2\,dx + \int_1^2 \pi 2^2\,dx - \int_1^2 \pi[2-(2-x)]\,dx = \frac{10}{3}\pi$$

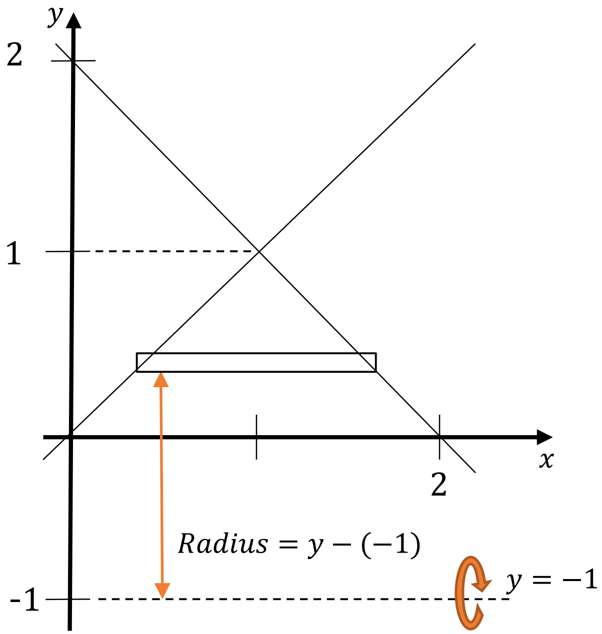
(b) 원주각법 반지름 r = y-(-1) = y+1

$$V = \int_0^1 2\pi[y-(-1)]((2-y)-y)\,dy = \int_0^1 4\pi(1-y^2)\,dy = 4\pi\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}\pi$$

(b) 워셔법 X=1 에서의 대칭을 이용함 외부반지름 A $r_0 = x+1$

외부반지름 B $r_0 = 2-x+1$

$$V = \int_0^1 \pi(x+1)^2\,dx - \int_0^1 \pi 1^2\,dx + \int_1^2 \pi(2-x+1)^2\,dx - \int_1^2 \pi 1^2\,dx = \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

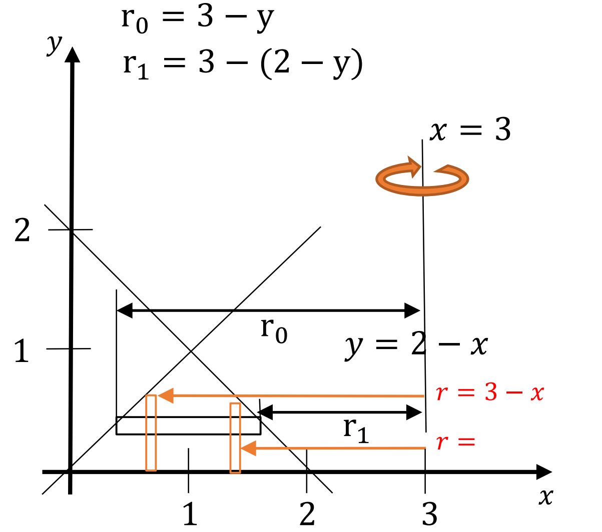


(c) 원주각법 $r_0 = 3-y$ $r_i = 3-(2-y)$

$$V = \int_0^1 \pi\{(3-y)^2 - [3-(x-y)]^2\}\,dy = 4\pi$$

(c) 워셔법 A,B 두 부분으로 분할함

$$V = \int_0^1 2\pi(3-x)x\,dx + \int_1^2 2\pi(3-x)(2-x)\,dx = \frac{7}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi = 4\pi$$



<예제> $y = \cos x$와 $y = x^2$로 둘러싸인 영역을 $(a) x = 2, (b) y = 2$로 회전시킨 입체의 부피를 구하라

Equate $y = \cos x$ with $y = x^2$ to determine two Roots using newton Rapson Method

$x = \pm 0.824132$

(a) 원주각법 $V = \int_{-0.824132}^{0.824132} 2\pi(2 - x)(\cos x - x^2)\, dx \cong 13.757$

(a) 워셔법 $V = \int_0^1 \pi(\cos^{-1} y - \sqrt{y})^2\, dy - \int_0^1 \pi(2)^2\, dy + \int_0^1 \pi(2)^2\, dy - \int_0^1 \pi(\cos^{-1} y - \sqrt{y})^2\, dy$

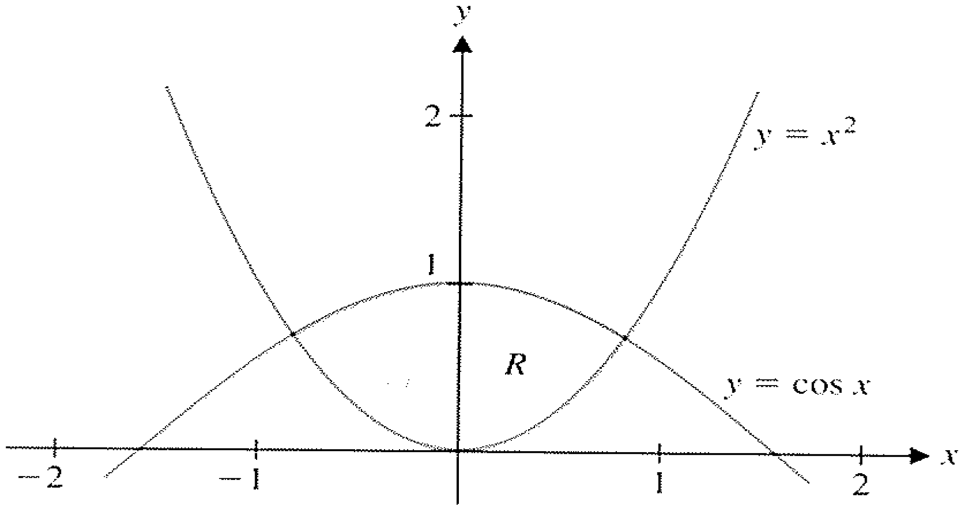


FIGURE 5.33a

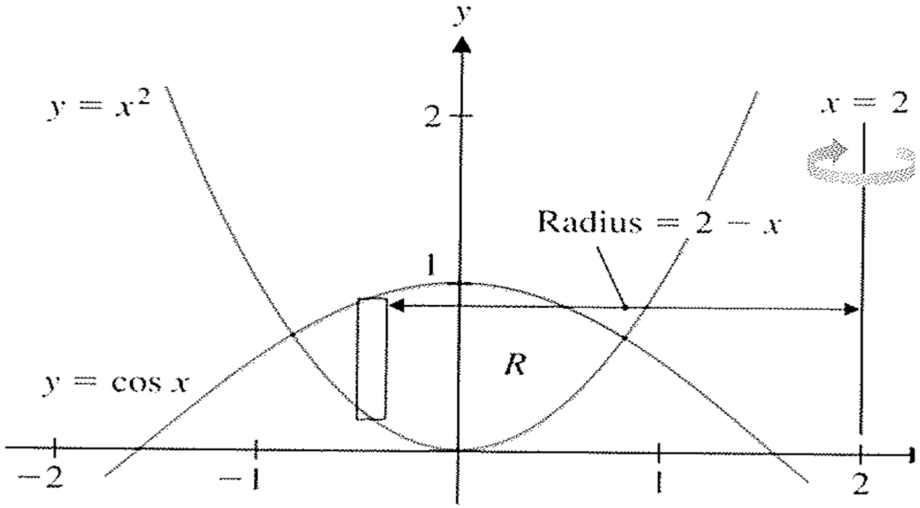


FIGURE 5.33b

(b) 워셔법 $\quad V \cong \int_{-0.824132}^{0.824132} \pi[(2-x^2)^2 - (2-\cos x)^2]\,dx \approx 10.08$

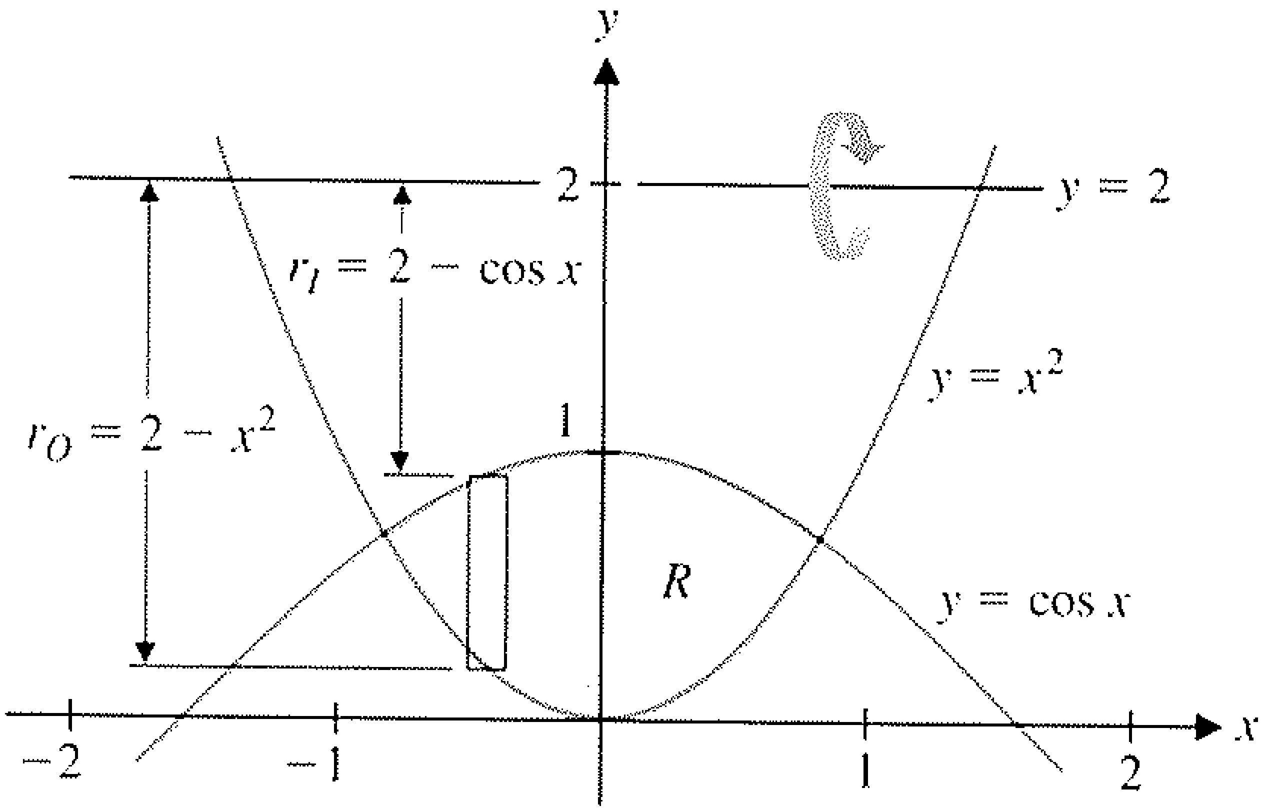


FIGURE 5.33c

<연습문제 5.3>

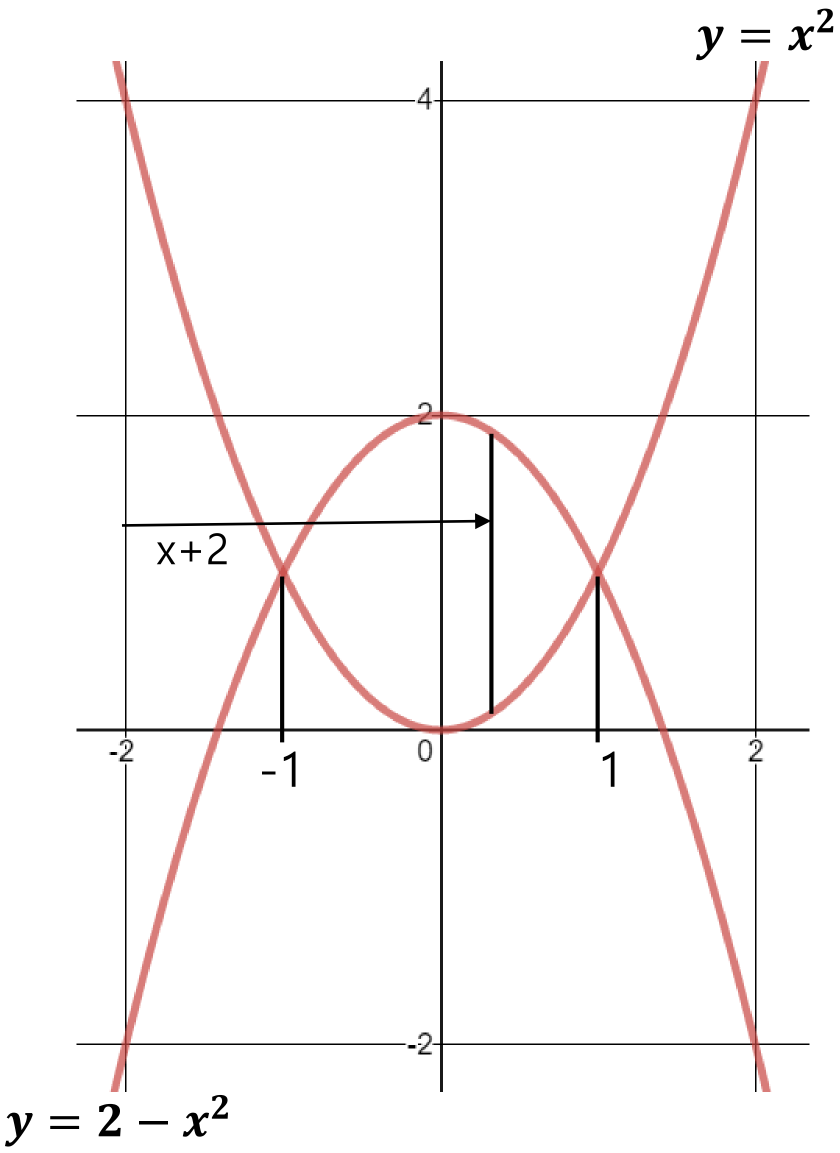
<문제 5> 원주각법을 사용하여 다음 회전체의 부피를 구하여라

함수 $y = x^2, y = 2 - x^2$로 유계된 영역, 회전축 $x = -2$

$$x^2 = 2 - x^2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$V = \int_{-1}^{1} 2\pi(x+2)((2-x^2) - x^2)\,dx = 2\pi \int_{-1}^{1} (4 + 2x - 4x^2 - 2x^3)\,dx$$

$$= 2\pi \left[4x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{3}\pi$$



- 5.4 호의 길이와 겉넓이

<정리 4.4> 적분의 평균값 정리

만약 [a,b]에서 f가 연속이면 f(c)=$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$인 적당한 수 $c \in (a,b)$가 존재한다

위 식을 x에 관하여 미분하면 $f'(c) = \frac{1}{b-a}\left(f(b) - f(a)\right)$

여기에서 $a = x_{i-1}, b = x_i$ 한다. 이것을 대입하면 $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$

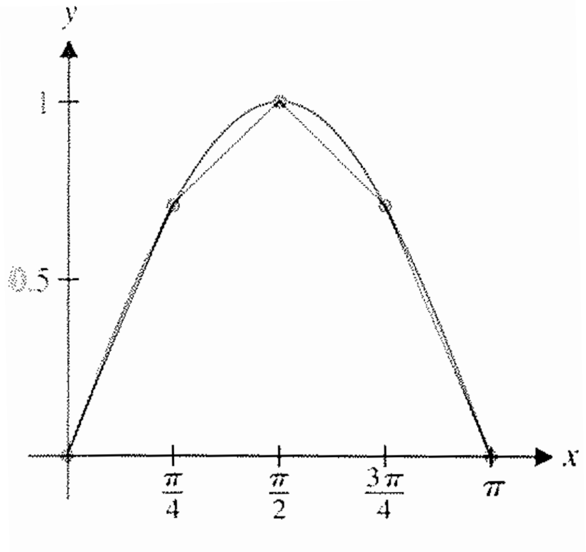
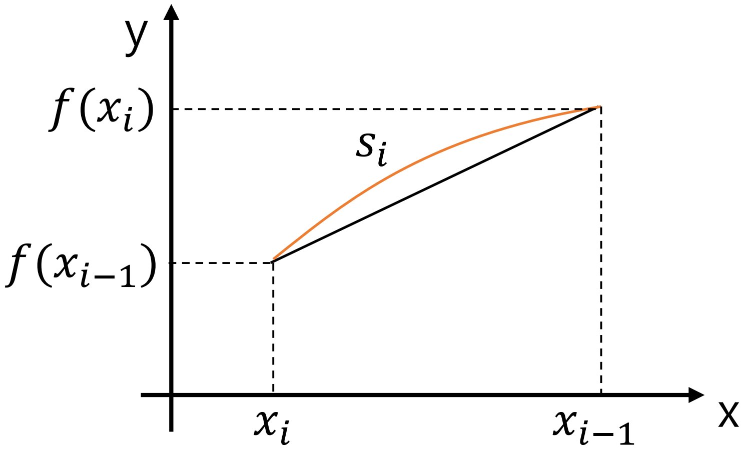


FIGURE 5.34b



(그림 5.35) 선분조각 한 개의 길이 계산

$$s_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2}$$

$$= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}(x_i - x_{i-1}) = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x$$

n개의 선분의 조각의 길이를 모두 합하여 전체 곡선 길이의 근사값을 구한다

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x$$

곡선 길이의 참 값 $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

즉, 이것은 $\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}$의 리만합의 극한이다.

-겉넓이

-다음을 생각해 보자
그림 5.39a 와 같이 밑면의 반지름이 r이고 빗면의 길이가 l 인 직원뿔에서 빗면을 일직선으로 잘라 펼치면 그림 5.39b와 같이 부채꼴을 얻는다.

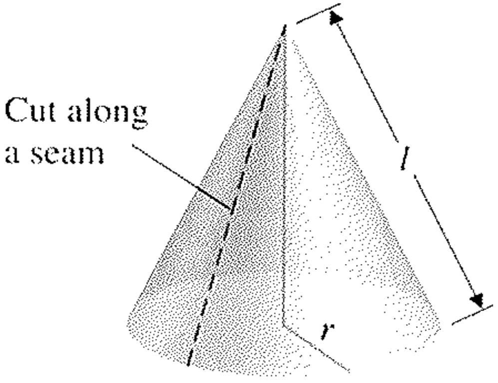


FIGURE 5.39a
Right circular cone

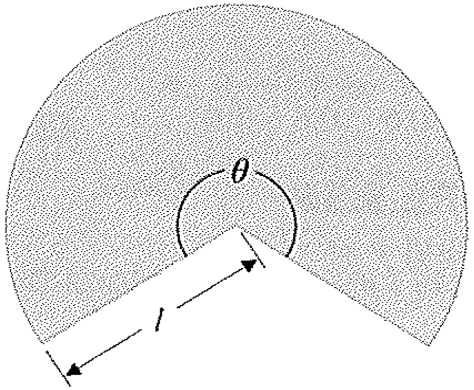


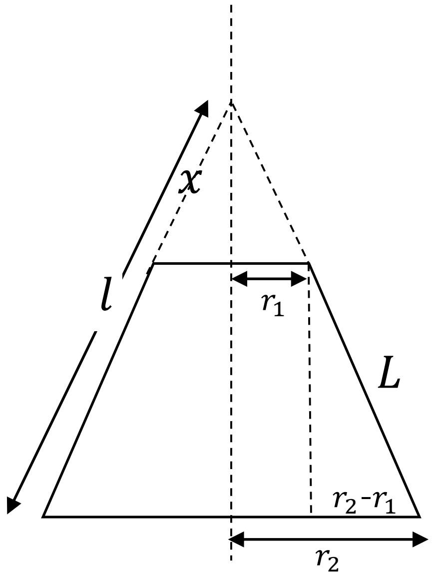
FIGURE 5.39b
Flattened cone

직원뿔의 겉넓이 = 부채꼴의 넓이이다. 따라서 부채꼴의 넓이는 $A = \pi l^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2} l^2$

이제 θ를 구한다 : 직원뿔의 밑면의 둘레 = 부채꼴의 호의길이 $2\pi r = 2\pi l \frac{\theta}{2\pi} = l\theta$

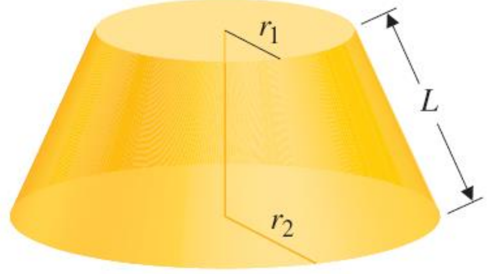
$\therefore \theta = \frac{2\pi r}{l}$ 이것을 윗 식에 대입하면 부채꼴의 넓이(직원뿔의 겉넓이) $A = \frac{\theta}{2} l^2 = \left(\frac{2\pi r}{l}\right)\frac{1}{2} l^2 = \boldsymbol{\pi r l}$

이제 그림 5.40의 원뿔대의 겉넓이를 구한다. (직원뿔에서 윗부분을 밑면과 수평으로 잘라낸 형태)



$$x : 2r_1 = l : 2r_2 \qquad \therefore\ x = \frac{r_1 l}{r_2}$$

$$r_2 : r_2 - r_1 = l : L \qquad \therefore\ L = \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2}\right) l$$



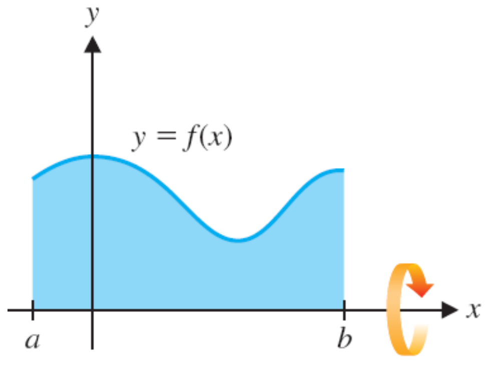
$$A = \pi r_2 l - \pi r_1 x = \pi\left(r_2 l - \frac{{r_1}^2 l}{r_2}\right) = \pi l\left(\frac{{r_2}^2 - {r_1}^1}{r_2}\right) = \pi(r_1 + r_2)\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2}\right) l = \pi(r_1 + r_2)L$$

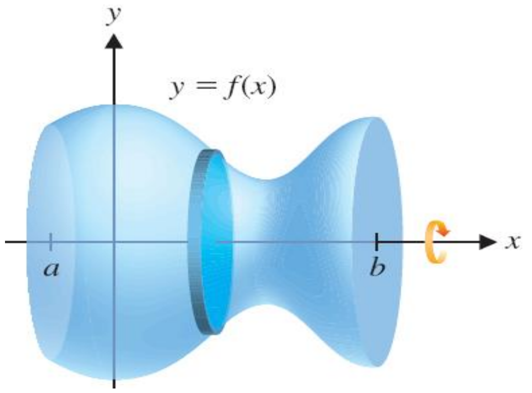
그림 5.41a와 5.41b에서 보여주는 회전체의 겉넓이의 계산은 앞에서 계산한 호의 길이 (어떤 임의의 포지션 x에서)에 원주의 길이를 곱해서 구간 [a,b]에서 적분해주면 된다.

즉, 호의 길이 $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\Delta x$

원주의 길이 2π(반지름)= 2π f(x)

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$





<연습문제 5.4>

<문제 4> 다음 곡선의 길이를 구하라

$y = 4x^{\frac{3}{2}} + 1 \quad (1 \le x \le 2)$ $\qquad f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ $\qquad \therefore \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{1 + 36x}$

$S = \int_1^2 \sqrt{1 + 36x}\, dx$ **치환적분 이용함** $u = 1 + 36x \qquad du = 36dx$

$x = 1 \ \rightarrow u = 37$

$x = 2 \ \rightarrow u = 73$

$$\Rightarrow \frac{1}{36}\int_{37}^{73} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{36}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{37}^{73} = \frac{1}{54}\left(73\sqrt{73} - 37\sqrt{37}\right) \cong 7.38$$

<문제 13> 회전체의 겉넓이를 구하는 정적분 식을 쓰고 수치 근사값을 구하라

$y = 2x - x^2 \ (0 \le x \le 2)$ 회전축 x축

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^2 2\pi(2x - x^2)\sqrt{1 + (2 - 2x)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2x - x^2)\sqrt{4x^2 - 8x + 5} dx \cong 10.97$$ **치환적분이 불가능, 수치적으로 계산함**

<문제 15> 회전체의 겉넓이를 구하라

$$y = \cos x \quad (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$$ 회전축 x축

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \cos x \sqrt{1 + (-\sin x)^2}\, dx \cong 7.21$$ **치환적분이 불가능, 수치적으로 계산함**

<문제 11> 다음 곡선의 길이를 구하라

$$x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2} \quad (-2 \le y \le -1) \qquad f'(y) = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2y^3} = \frac{1}{2}\left(y^3 - \frac{1}{y^3}\right)$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(y)]^2}\, dy = \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(y^3 - \frac{1}{y^3}\right)\right]^2}\, dy = \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(y^6 - 2 + \frac{1}{y^6}\right)}\, dy$$

$$= \int_{-2}^{-1} \sqrt{\frac{1}{4}\left(y^6 + 2 + \frac{1}{y^6}\right)}\, dy = \int_{-2}^{-1} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)\right)^2}\, dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} - \frac{1}{2y^2}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{33}{16}$$

<문제 10> 서로 40ft 떨어진 두 장대 사이에 로프가 매여있다. 로프의 모양이 현수선 $y = 10\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{-\frac{x}{20}}\right)$ 일 때, 구간 $-20 \le x \le 20$에서의 로프의 길이를 구하라

$$f(x) = 10\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{-\frac{x}{20}}\right) \qquad f'(x) = \frac{10}{20}\left(e^{\frac{x}{20}} - e^{-\frac{x}{20}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{20}} - e^{-\frac{x}{20}}\right) \qquad S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$1 + [\mathrm{f}'(\mathrm{x})]^2 = 1 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{20}} - e^{-\frac{x}{20}}\right)\right]^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}} - 2e^0\right) = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}} - 2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}} + 4 - 2\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(\left[\mathrm{e}^{\left(\frac{x}{20}\right)}\right]^2 + \left[e^{-\frac{x}{20}}\right]^2 + 2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{-\frac{x}{20}}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{-\frac{x}{20}}\right)\right]^2$$

이제 $S = \int_{-20}^{20} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{-\frac{x}{20}}\right) dx = 2\int_0^{20} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{20}} + e^{-\frac{x}{20}}\right) dx = 20\left[e^{\frac{x}{20}} - e^{-\frac{x}{20}}\right]_0^{20} = 20(e - e^{-1})$

$\approx 47.01ft$

- 5.5 발사체 운동

물체의 가속도를 한번 적분하면 속도, 두번 적분하면 물체의 위치를 구할 수 있다.

뉴턴의 제 2 운동법칙 $\vec{F} = m\frac{\vec{a}}{g_c}$ ⇒ 통상 F=ma로 한다

Note : 높은 다이빙대에서 다이빙을 하는 몸무게 m(kg)인 선수를 생각한다

공기저항과 부력을 무시할 때, 작용하는 힘은 F=-mg (힘이 아래 방향으로 작용하므로)

h(t)를 다이빙 후 t초 후에 수면으로부터 다이빙 선수까지의 거리로 할 때, F=-mh″(t) 이다.

<예제> 수면 위 15ft에 위치한 다이빙대에서 선수가 처음 속도 8ft/s로 뛰어올랐다. 다이빙 선수가 수면에 떨어지는 순간의 속도를 구하라

$$h(0) = 15ft, \qquad h'(0) = 8\,ft/s, \qquad h''(t) = -g\ \ (-32\,ft/s^2)\ \ (Newton's\ 2nd\ Law)$$

$Integrate\ h''(t)\ to\ obtain\ h'(t)$ (속도함수)

$$h'(t) = \int h''(t)\,dt = -gt + c_1 \quad apply\ h'(0) = 8 \Rightarrow\ 8 = c_1 \qquad \therefore h'(t) = -gt + 8$$

$Integrate\ h'(t)\ to\ obtain\ h(t)$ (위치함수)

$$h(t) = \int(-gt + 8) = -\frac{g}{2}t^2 + 8t + c_2 \quad apply\ h(0) = 15 \Rightarrow\ 15 = c_2$$

$$Substitute\ \ g\ =\ 32\,(ft/s^2) \qquad \Rightarrow \qquad \therefore h(t) = -16t^2 + 8t + 15$$

선수가 수면에 떨어질 때, 즉 $h(t) = -16t^2 + 8t + 15 = -(4t+3)(4t-5) = 0$을 만족하는 $t = \frac{5}{4}$(s)

이 때 속도 $h'\left(t = \frac{5}{4}\right) = -32\left(\frac{5}{4}\right) + 8 = -32(\frac{ft}{s})$ 즉, 아래 방향으로 $-32(\frac{ft}{s})$ 속도로 떨어진다

<예제> **수직 운동 :** 공을 처음 속도 64 ft/s로 지상에서 수직으로 쏟아 올릴 때, 공의 위치 함수를 구하라. 그리고 공의 최고 높이와 공이 공중에 떠있는 총 시간을 구하라.

처음 속도 h′(0) = 64 ft/s

지상에서 처음 위치 h(0) = 0

공의 최고 높이 ⇒ 속도가 0가 되는 지점 h′(t) = 0

물체의 가속도 h″(t) = -32 ft/s^2 한번 적분: h′(t) =-32t+c_1 다시 적분: h(t) = -16t^2+c_1t+c_2

h′(0) = 0 ⇒ $c_1 = 64$ h′(t) = -32t+64

h(0) = 0 ⇒ $c_2 = 0$ **h(t) = -16t^2+64t**

이때 최고 높이는 h′(t) = 0 일 때 이므로 ⇒ 0 = -32t+64 ⇒ t = 2(s)

최고 높이는 h(t=2) = -16(2)^2+64(2) = **64 ft**

공이 땅에 떨어지는 순간 h(t) = 0 ⇒ -16t^2+64t = 16t(4-t)

공이 공중에 떠있는 총 시간 **t =4 (s)**

<예제> **특정한 높이 도달하기 위해 필요한 처음 속도 :** 농구 황제 Michael Jordan 의 수직 높이 최고 기록은 54inch이다. 얼마의 처음 속도로 뛰어오르면 이 높이까지 뛰어 오를 수 있을까?

Jordan 의 최대 수직 높이 54″ = 4.5ft는 h′(t) = 0 일 때 발생한다

처음 속도 h′(0) = v_0

처음 위치 h(0) = 0

Jordan의 중력 가속도는 Newton의 운동법칙에 따라서 h″(t) = -32 f/s^2

두번 적분 $h'(t) = -32t + c_1$ $\qquad h'(0) = v_0 \;\Rightarrow\; v_0 = c_1 \Rightarrow\; h'(t) = v_0 - 32t$

$h(t) = -16t^2 + c_1 t + c_2 \qquad h(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = c_2 \;\Rightarrow\; h(t) = v_0 t - 16t^2$

최대 높이는 속도함수 h′(t) = 0 일 때 $\Rightarrow\; 0 = v_0 - 32t \;\Rightarrow\; t = \frac{v_0}{32}$

이 때 최대 높이는 h($t = \frac{v_0}{32}$) = $v_0\left(\frac{v_0}{32}\right) - 16\left(\frac{v_0}{32}\right)^2 = \frac{v_0^2}{32} - \frac{v_0^2}{64} = \frac{v_0^2}{64} = 4.5\,ft$

$\therefore v_0 = \sqrt{288} \approx 17\,ft/s$

<예제> **이차원 발사체 운동 :** 물체가 수평축으로 부터 $\theta = \frac{\pi}{6}$ (30º)의 각을 이루며 위로 발사되었다. 처음속도 $v_0 = 98m/s$일 때 날아가는 동안의 시간과 수평으로 날아간 거리 및 최대 높이를 구하라

처음 위치 y(0) = 0 처음 속도 y′(0) = 98 sin30 = 49 m/s

(A) y 방향 수직성분 가속도 함수 y″(t) = -9.8(m/s^2)

y′(t) = -9.8t+c_1 y′(0) = 49 ⇒ $c_1 = 49$

$y'(t) = -9.8t + 49$

위치 함수 y(t) = -4.9t^2+49t+c_2

$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{c}_2 = 0$ $\therefore y(t) = -4.9t^2 + 49t$

공기의 저항을 무시할 때, 위치 함수의 수직 성분식 $y(t) = -4.9t^2 + 49t$

물체가 지상에 떨어질 때 y(t) = 0

$0 = -4.9t^2 + 49t = 4.9(10 - t)t$

$\therefore t = 10s$ (물체가 날아가는 시간)

(B) x 방향 수평성분 처음 위치 $x(0) = 0$

처음 속도 x' (0) = 98cos30 = $49\sqrt{3}\, m/s$

가속도 없이 일정한 속도(처음 속도)로 비행한다.

$\therefore x'(t) = 49\sqrt{3}$

위치 함수 $x(t) = 49\sqrt{3}t + c_1,\ x(0) = 0 = c_1$

$\therefore x(t) = 49\sqrt{3}\, t$

10초간 날아간 거리 $\therefore x(10) = 490\sqrt{3} = 849m$

최대높이 되는 시간 $y'(t) = 0 = -9.8t + 49$

$\therefore t = 5\ s$

최대높이 $y(t = 5) = -4.9(5)^2 + 49(5) = 122.5m$

<예제> 지상에서 3000ft 상공에서 빗방울이 떨어질 때 땅에 도달했을 때의 속도를 구하라 (**공기저항 무시**)

높이 함수 y(t) 중력가속도 y″(t) = -32 ft/s^2

처음위치 y(0) = 3000ft 처음속도 y′(0)=0

$y''(t) = -32$를 두번 적분 $y'(t) = -32t + c_1$

$y(t) = -16t^2 + c_1 t + c_2$

$y'(0) = 0 \rightarrow 0 = c_1 \rightarrow y'(t) = -32t$

$y(0) = 3000 \rightarrow 3000 = c_2 \rightarrow y(t) = 16t^2 + 3000$

빗방울이 땅에 떨어지는 순간 y(t) = 0이므로

$0 = -16\text{t}^2 + 3000 \quad \therefore t \cong 13.69(s)$

이 때의 빗방울의 속도는

$y'(t = 13.69) = -32(13.69) = -438.18ft/s = -298.8\,mph$ (아래로 떨어지므로 minus가 붙음)

만약 공기 저항을 고려한다면 물방울의 최종 속도가 y′(t)≅10mph 가 된다

- 단위 (Unit)

1ft = 12inch, 1ft = 30.48cm, 1inch = 2.54cm, 1mile = 5280ft = 1.6km

-**무게밀도** (Weight Density) or 비중량 (Specific Weight) : **γ (**Gamma**)**

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{g} \;\; (N/m^3,\ lb_f/ft^3) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{1}{m^3} = \frac{N}{m^3}$$

(물의 비중량 : 9800 N/m^3, 62.4 lb_f/ft^3)

-**비중** (Specific Gravity) : S

$$S_{gas} = \frac{\boldsymbol{\rho}_{gas}}{\boldsymbol{\rho}_{air\ at\ STD}}$$

(여기에서 $STD\ at$ 1기압, 20℃)

$$S_{liq} = \frac{\boldsymbol{\rho}_{liq}}{\boldsymbol{\rho}_{water\ at\ STD}}$$

-무게 (Weight) : W

$1lb_f\ accelerates\ 32\ lbm\ of\ mass\ 1ft/s^2$ 즉 $1lb_f = 32\frac{lb_m \cdot ft}{s^2}$

$1lbf\ accelerates\ 1\ slug\ of\ mass\ 1ft/s^2$ 즉 $1lb_f = \frac{slug \cdot ft}{s^2}$

$W = F = \frac{mg}{g_c}$에 의하면 1lb_m weighs 1lb_f 즉 $\dfrac{1lbm \cdot 32ft/s^2}{32\dfrac{lb_m \cdot ft}{lb_f \cdot s^2}} = 1\ lb_f$

또는 $1slug\ weighs\ 32\ lbf$ 즉 $\dfrac{1slug \cdot 32ft/s^2}{1\dfrac{slug \cdot ft}{lb_f \cdot s^2}} = 32\ lb_f$

-무게

1kg weighs 9.8N or 1kg weighs $1kg_f$

$$W = \frac{mg}{g_c} = \frac{1kg \cdot 9.8m/s^2}{1\frac{kg \cdot m}{N \cdot s^2}} = 9.8N \quad or \quad \frac{1kg \cdot 9.8m/s^2}{9.8\frac{kg \cdot m}{kg_f \cdot s^2}} = 1kg_f$$

-에너지 및 Power

에너지 : 힘 x 거리 = N · m = Joule (J), Power (시간당 행한 일): J/s= Watt (W)

lb_f·ft=Btu, 1lb_f=4.48N, 1Btu=1,055J 1Btu/hr=293W

-질량

1 lb_m = 0.454kg, 1 $slug$ =32 lb_m

-온스 (Ounce: Oz) **<**예제 6-5>와 관련

$1g_f = 0.035\, Oz$

$m = 6.144 \times 10^{-2}\, slug = 1.98\, lbm = 897 g_m$

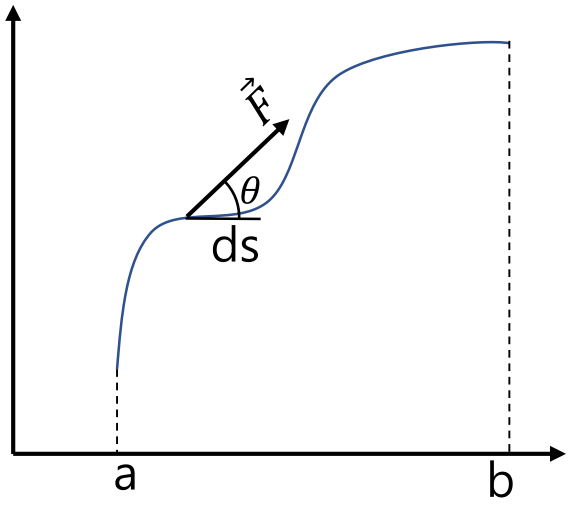
그런데 $1g_m\ weighs\ 1g_f$

따라서 $897\ g_m\ weighs\ 897 g_f$ 이고, $897\ g_m$의 무게는 $897 g_f \times 0.035\, (\frac{Oz}{g_f}) = 31.5\, Oz$

- 5.6 물리학과 공학에의 응용

-**일 (Work)** (N·m, lb_f ·ft) : Path function, Position dependent property

힘 F를 물체에 작용시켜서 거리 d 만큼 움직일 때 한 일 W = F · d



일반적인 경우의 일

$$W = \int_a^b \vec{F}\, d\vec{s} = \int_a^b F\cos\theta\, ds$$

물체에 작용하는 힘과 같은 방향 (x방향)으로 물체가 dx만큼 움직일 때 일

$$W = \int_a^b F\, dx$$

- **용수철에 작용하는 힘** (Hooke's Law에 따른다) $F = kx$ 여기에서 k = 용수철 상수 (lb_f/ft or N/m)

이 때, 용수철을 x만큼 압축하거나 늘리는데 필요한 일 $W = \int_0^x F\, dx = \int_0^x kx\, dx = \frac{k}{2}x^2$

<예제> 용수철 ¼ ft를 늘리는데 3lb_f 의 힘이 든다. 용수철이 6 inch 늘어나는데 필요한 일을 구하라.

$F = kx$ 에서 $3lbf = k\left(\frac{1}{4}ft\right)$ $\therefore k = 12lb_f/ft$ 따라서 $W = \frac{k}{2}x^2 = \left(\frac{12}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}(lbf \cdot ft)$

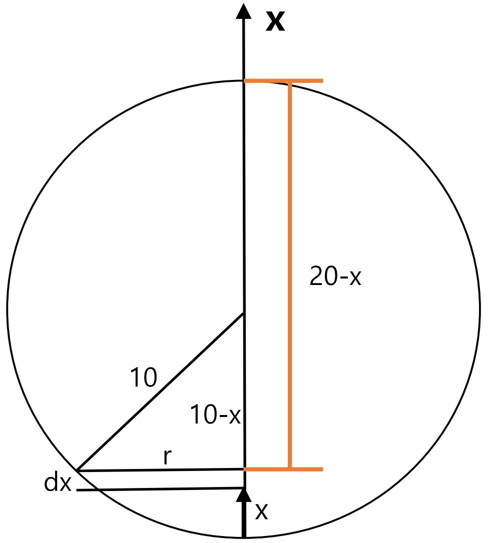
<예제> (1)역도 선수가 200 lb_f 의 바벨을 3ft 들어올렸을 때 한 일

$$W = Fd = (200)(3) = 600(lb_f \cdot ft)$$

(2) 땅에서 4ft 들어올렸다가 다시 내려놓았을 때 한 일 (Work is Position dependent property)

⇒ 일은 작용한 거리에 비례하므로 이 경우는 거리가 0이므로 일도 0이다.

<예제> 반지름이 10ft인 구모양의 탱크에 물이 가득 차 있다 이 물을 모두 퍼내는데 필요한 일을 구하라



피타고라스 정리를 이용하여 조각물 dx의 반지름을 구한다

$$r^2 = 10^2 - (10 - x)^2 = 20x - x^2$$

조각물 dx 의 부피 $dV = \pi r^2 dx = \pi(20x - x^2)dx$

dV를 옮기는데 필요한 힘 dF

dF = (조각물의 부피)(단위 부피당 물의 무게: 비중량)=$\pi(20x - x^2)dx\ (62.4\frac{lb_f}{ft^3})$

조각물 dV 를 퍼내는데 필요한 일 dW

$$dW = dF(20 - x) = 62.4\pi(20x - x^2)dx(20 - x) = 62.4\pi x(20 - x)^2 dx$$

전체 일 $W = \int_0^{20} 62.4\pi x(20 - x)^2\, dx = 62.4\pi\left(\frac{40000}{3}\right) \cong 2.61 \times 10^6 lb_f \cdot ft$

- **Impulse (임펄스) : J** ($\frac{kg \cdot m}{s}$, $\frac{lb_m \cdot ft}{s}$)

필요한 에너지를 계산하기 위해서 힘과 거리를 이용한 것처럼
Impulse는 힘과 시간을 이용하여 속도의 변화를 계산하다.

상수의 힘 F가 시간 t=0부터 t=T까지 물체에 작용하다. 이 때 시각 t에서의 물체의 위치가 x(t)이면
뉴턴의 제2 법칙에 의하여 F=ma=m$x''(t)$ $\Longrightarrow$ t에 대하여 적분한다.

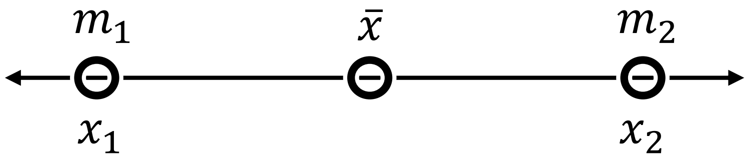
$$\int_0^T F\,dt = m\int_0^T x''(t)\,dt$$

$$FT = m\big(x'(t) - x'(0)\big) = m[v(t) - v(0)] \Rightarrow FT = m\Delta v$$ (Δv: 속도의 변화량)

이제, 힘 F(t)가 시간 구간 [a,b]에 작용했을 때 임펄스 J는 다음과 같다.

$$J = \int_a^b F\,dt = \int_a^b m x''(t)\,dt = m[x'(b) - x'(a)] = m\big(v(b) - v(a)\big)$$

- 질량중심



두개의 점 질량

물체의 평형식 $m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$

∴ 질량중심 $\bar{x} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$

n개의 질량 $m_1, m_2, \cdots m_n$이 각각 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 놓여있을 때 질량 중심

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

계의 1차 능률 (First Moment)

총질량

-단위 길이당 질량으로 측정된 밀도 $\boldsymbol{\rho}$(x) (kg/m, slug/$inch$)가 변수인 물체가 x=a로부터 b까지 펼쳐져 있을 때

질량 $m = \displaystyle\int_a^b \boldsymbol{\rho}(x)\,dx$ 질량중심 $\bar{x} = \dfrac{M}{m} = \dfrac{\int_a^b \boldsymbol{\rho}(x)x\,dx}{\int_a^b \boldsymbol{\rho}(x)\,dx}$

<예제> 30 $inch$ 야구방망이의 단위길이당 질량이 $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{890}\right)$ (slug/$inch$)인 방망이의 질량을 구하라

$$m = \int_0^{30} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{890}\right) dx \cong 6.144 \times 10^{-2} slug = 1.98\ lbm\ (897 g_m)$$

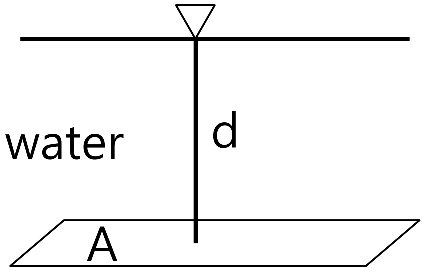
여기에서 $1.98\ lb_m\, weighs\ 1.98 lbf\ \ or\ \ 897 g_m\ weighs\ 897 g_f$

$1 g_f = 0.035$ 온스 (Oz) 따라서 $897 g_f = 897 \times 0.035 = 31.5\ Oz$

<예제> 질량중심

$$\frac{M}{m} = \frac{\int_0^{30} x\left(\frac{1}{46} + \frac{x}{890}\right) dx}{6.144 \times 10^{-2}} = \frac{1.205}{6.144 \times 10^{-2}} \cong 19.6\ inch$$

- 수압



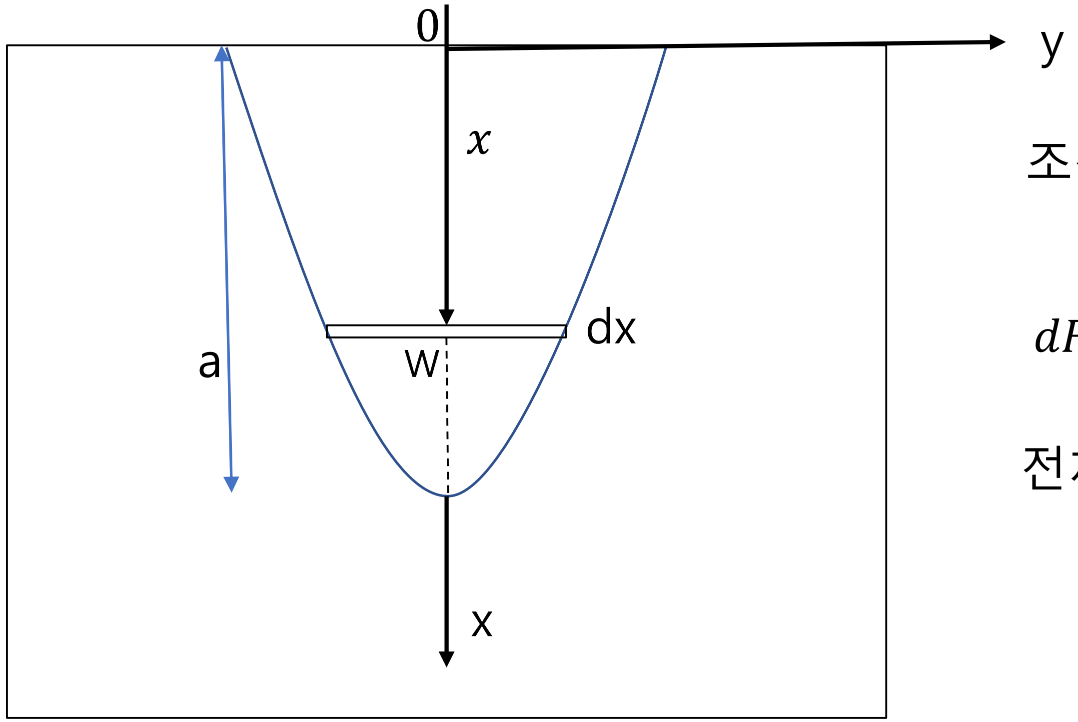
-수면에서 거리d의 위치에서의 압력

$$P = r_w d\ (Hydrostatic\ Law)$$

-넓이가 A인 판에 작용하는 힘 (수직, 수평방향에 무관함)

$$F = PA = r_w Ad$$

- 댐에 작용하는 힘

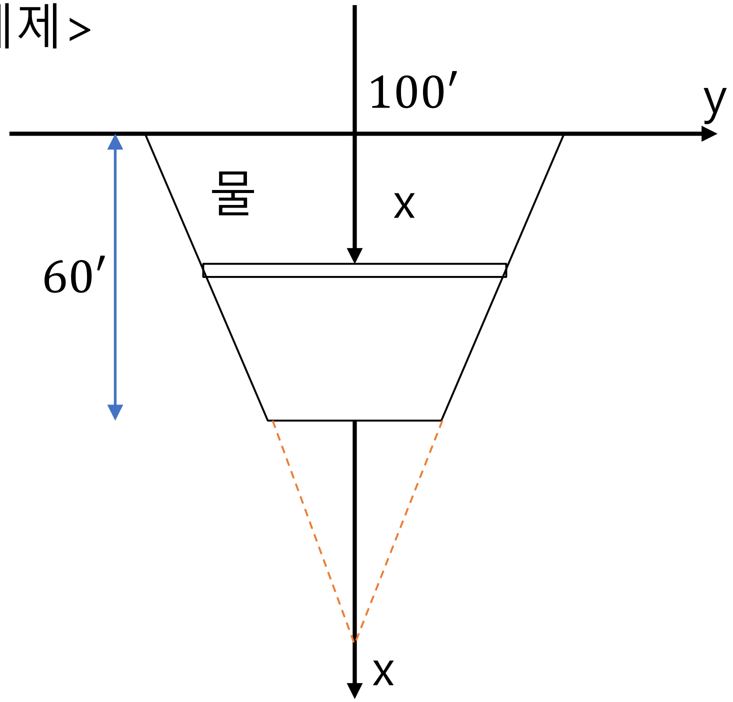


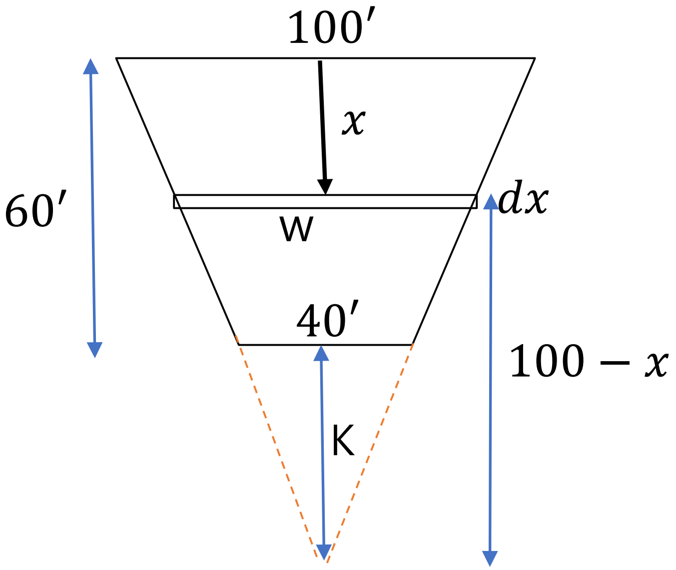
조각물의 단면 $W(x)dx$ 에 작용하는 힘

$$dF = 62.4\left(\frac{lb_f}{ft^3}\right)W(x)dx\ x = 62.4x\ W(x)dx$$

전체 힘 $F = \int_0^a 62.4x\ W(x)\ dx$

<예제>





높이 60ft 인 사다리꼴의 댐이 있다.
윗부분 폭이 100ft 아랫부분은 40ft이다.

(1) 댐에 작용하는 최대 힘을 구하라
(2) 가뭄으로 수위가 10ft 낮아질 때의 최대 힘을 구하라

$100 : 40 = 60 + K : K$

$2400+40k=100k \qquad \therefore\ K= 40$

$$100 : W = 100 : 100 - x$$

$$100\,W = 100(100 - x) \qquad \therefore W = 100 - x$$

조각물의 단면 작용하는 힘 $dF = 62.4(Wdx)x = 62.4x(100 - x)dx$

$$\therefore F = \int_0^{60} 62.4x(100 - x)\,dx = 6{,}739{,}200\ lb_f$$

$$90 : W = 90 : 10 - x \quad \therefore W = 90 - x$$

$$\therefore F = \int_0^{50} 62.4x(90 - x)\,dx = 4{,}420{,}000\ lb_f$$