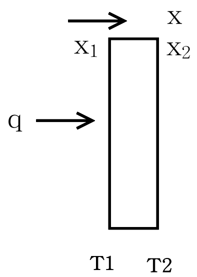
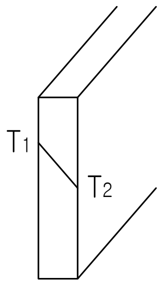
Chapter 2 정상상태의 전도 - 1차원

2.2 평면벽





Approach #1: Fourier 공식 $q = -kA\dfrac{dT}{dx}$에서

1) k = constant의 경우 x에 관하여 한번 적분하면,

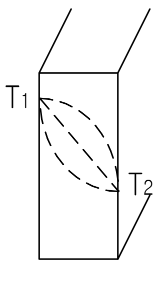
$$q\int_{x_1}^{x_2} dx = -A\int_{T_1}^{T_2} k\,dT \quad \Rightarrow \quad q = -kA\frac{(T_2 - T_1)}{\triangle x}$$

여기에서 $\triangle$x : 벽면 두께, T_1, T_2 : 두 표면에서의 온도

2) k = non-constant의 경우, 즉 $k = k_0(1+\beta T)$일 때 x에 관하여 한번 적분하면,

$$q\int_{x_1}^{x_2} dx = -A\int_{T_1}^{T_2} k\,dT = -Ak_0\int_{T_1}^{T_2}(1+\beta T)dT$$

$$\Rightarrow \quad q = -\frac{k_0 A}{\triangle x}\left[(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2}(T_2^2 - T_1^2)\right]$$



Approach #2: 1차원 열전도방정식 : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q} = \rho c\dfrac{\partial T}{\partial t}$에서

$\dot{q} = 0$(no heat generation), $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$(steady-state) 라고 하면 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$

1) k = constant의 경우, x에 관하여 두 번 적분하면, T(x) = C_1x + C_2

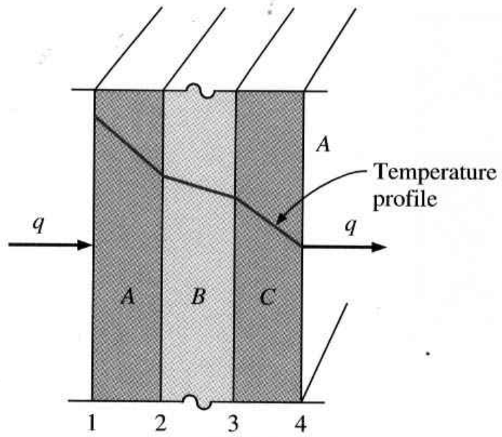
<u>두 개의 경계조건</u> x=0에서 T = T_1 : C_2 = T_1

x=$\triangle$x에서 T = T_2 : C_1 = $\dfrac{T_2 - T_1}{\triangle x}$

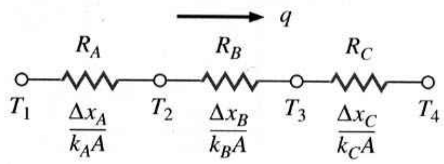
$$T = \left(\frac{T_2 - T_1}{\triangle x}\right)x + T_1$$: 온도분포

Thus, $\dfrac{dT}{dx} = \left(\dfrac{T_2 - T_1}{\triangle x}\right) \Rightarrow q = -kA\dfrac{dT}{dx} \Rightarrow q = -kA\dfrac{(T_2 - T_1)}{\triangle x}$

◦ 복합벽(Multi-layer wall)의 경우



(a)



(b)

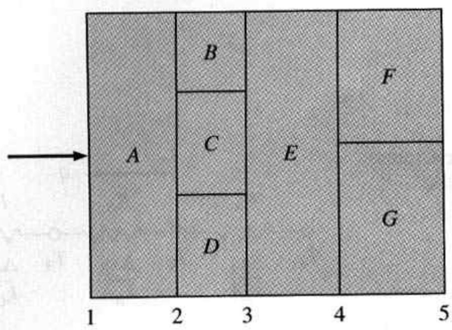
$$q = -k_A A \frac{T_2 - T_1}{\triangle x_A} = -k_B A \frac{T_3 - T_2}{\triangle x_B} = -k_C A \frac{T_4 - T_3}{\triangle x_C}$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\triangle x_A}{(k_A A)}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\triangle x_B}{(k_B A)}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{\triangle x_C}{(k_C A)}}$$

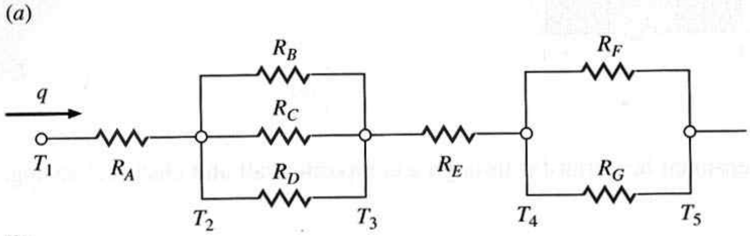
$$q = \frac{T_1 - T_4}{\left(\frac{\triangle x_A}{k_A A}\right) + \left(\frac{\triangle x_B}{k_B A}\right) + \left(\frac{\triangle x_C}{k_C A}\right)} \cdots\cdots\cdots (2.3)$$

Fourier 방정식은 Ohm 법칙의 전기회로 이론과 유사 :

열유동 = 열 포텐셜의 차이 / 열저항 $\Rightarrow q = \frac{\triangle T_{all}}{\sum R_{th}} \cdots\cdots\cdots (2.5)$



(a)



(b)

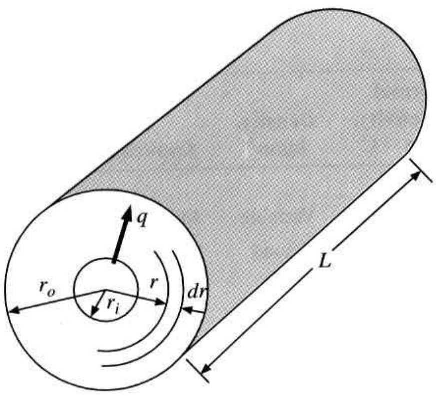
$$q = \frac{T_1 - T_5}{R_A + \frac{R_B R_C R_D}{R_C R_D + R_B R_D + R_B R_C} + R_E + \frac{R_F R_G}{R_F + R_G}}$$

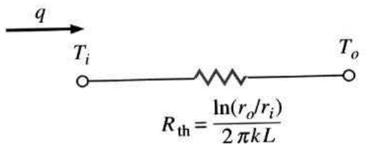
2.3 단열과 R값 ($m^2 \cdot ℃/W$)

$R = \frac{\triangle T}{(q/A)}$ Thus, $R_{th} = \frac{R}{A}$ 이다

2.4 방사형의 계

◦ 중공원통(hollow cylinder)





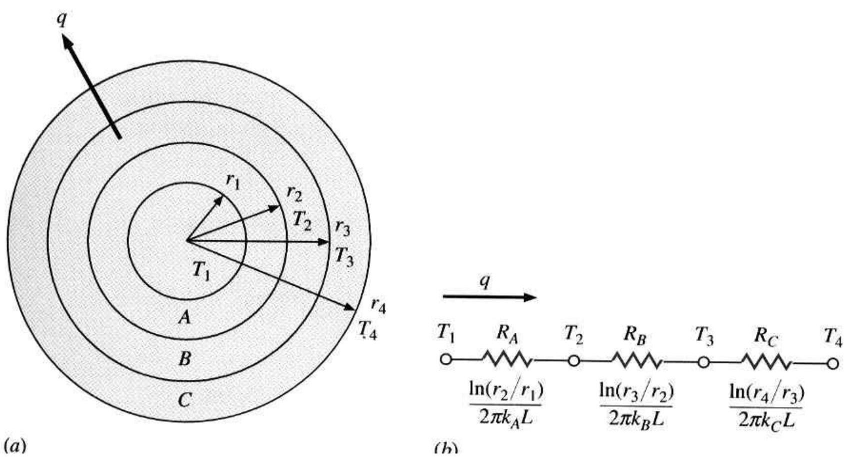
q→반경방향 : L >> 직경, $A_r = 2\pi rL$, $k = constant$

$q = -kA_r\frac{dT}{dr} = -k2\pi rL\frac{dT}{dr}$, r과 T의 변수를 분리하고

두경계조건 : $r = r_i$에서 $T = T_i$, $r = r_o$에서 $T = T_o$ 을 적용하여 적분하면 $\Rightarrow$ $q\int_{r_i}^{r_o}\frac{dr}{r} = -k2\pi L\int_{T_i}^{T_o}dT$

$q = \frac{2\pi kL(T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i)} = \frac{(T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i)/2\pi kL}$, 여기에서 열저항 $R_{th} = \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi kL}$

◦ 복합원통(multi-layered cylinder)



$$q = \frac{\Delta T_{all}}{\sum R_{th}} = \frac{T_1 - T_4}{R_A + R_B + R_C} = = \frac{T_1 - T_4}{\frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi k_A L} + \frac{\ln(\frac{r_3}{r_2})}{2\pi k_B L} + \frac{\ln(\frac{r_4}{r_3})}{2\pi k_C L}}$$

◦ 구(sphere)의 경우

단면적 $A_r=4\pi r^2$, k = constant 일 때 $$q = -kA_r\frac{dT}{dr} = k4\pi r^2\frac{dT}{dr}$$

r과 T의 변수를 분리하여 적분하면 ⇒ $q\int_{r_i}^{r_o}\frac{dr}{r^2} = -\int_{T_i}^{T_o}4\pi k dT$ Thus, $q = \frac{4\pi k(T_i - T_o)}{1/r_i - 1/r_o}$

예제 2-2 | 복합원 통계

내부지름이 2 cm이고 외부지름이 4 cm인 스테인레스강(18% Cr, 8% Ni, $k = 19$ W/m · ℃)으로 된 관 주위를 3 cm 두께의 석면($k = 0.2$ W/m · ℃)을 씌워 단열하였다. 관 내벽의 온도가 600℃이고 석면의 바깥 면 온도가 100℃일 때 관의 단위길이당 열손실을 계산하고, 관과 단열재 경계면에서의 온도를 구하여라.

■ 풀이

이 문제의 열회로는 그림과 같고 열손실은 다음과 같다.

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)/k_s + \ln(r_3/r_2)/k_a} = \frac{2\pi(600-100)}{(\ln 2)/19 + (\ln\frac{5}{2})/0.2} = 680 \text{ W/m}$$

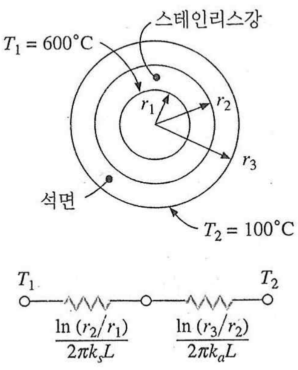
이 열손실은 두 재료 경계면에서의 온도를 구하는데 사용된다.

$$\frac{q}{L} = \frac{T_a - T_2}{\ln(r_3/r_2)/2\pi k_a} = 680 \text{ W/m}$$

여기서 T_a는 경계면에서의 온도이고, 다음과 같다.

$$T_a = 595.8℃$$

분명히 가장 큰 열저항은 단열재에서 초래되고, 온도 강하도 단열재를 통하는 동안 가장 크게 나타난다.



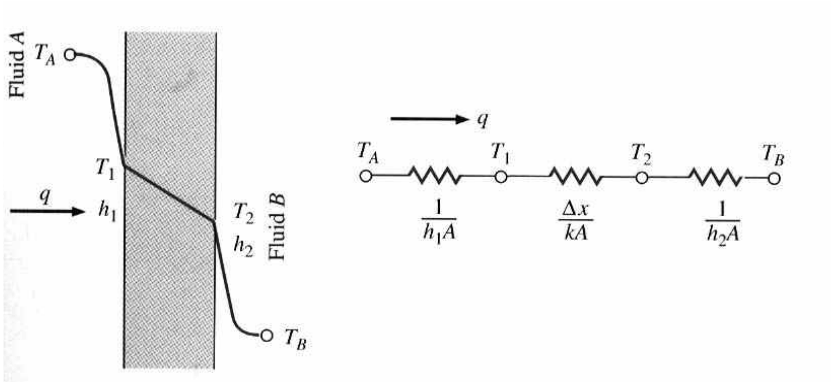
[그림 예제 2.2]

2.5 총괄열전달계수, U(W/m²·K)

◦ 대류 경계조건

$$q_{conv} = hA(T_w - T_\infty) : q_{conv} = \frac{T_w - T_\infty}{\frac{1}{hA}}, \left(\frac{1}{hA} = \text{대류열저항}\right)$$

◦ 평판벽 :

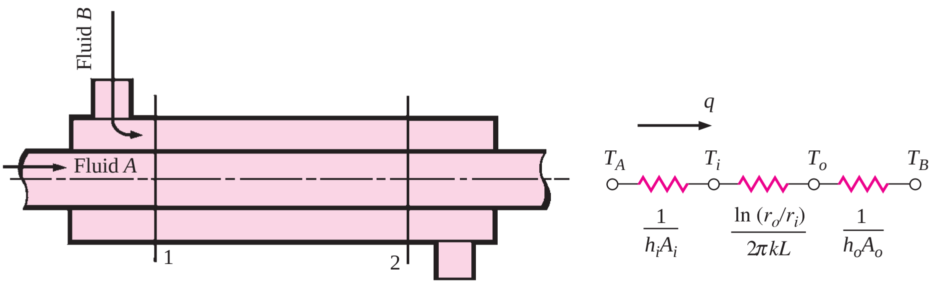


$$q = \frac{\Delta T_{all}}{\sum R_{th}} = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{\Delta x}{kA} + \frac{1}{h_2 A}} = \frac{A \Delta T_{all}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_2}}$$

$$= UA \Delta T_{all}$$

따라서, 총괄열전달계수 $U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_2}} = \frac{1}{R}$ 이 된다.

◦ 중공원통(hollow cylinder) :



$$q = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi kL} + \frac{1}{h_o A_o}} \quad : \quad q = UA(T_A - T_B) = U_i A_i (T_A - T_B) = U_o A_o (T_A - T_B)$$

Note: 튜브 내·외벽면의 기준에 따라 U값이 다르다

따라서, $U_o = \frac{1}{\frac{A_o}{A_i}\frac{1}{h_i} + \frac{A_o \ln(r_o/r_i)}{2\pi kL} + \frac{1}{h_o}}$, $U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{A_i \ln(r_o/r_i)}{2\pi kL} + \frac{A_i}{A_o}\frac{1}{h_o}}$

예제 2-5 원통에서의 총괄열전달계수

내부지름이 2.5 cm인 원통 안에 50°C의 물이 흐르고, 이때 대류열전달계수 $h_i = 3500\ \mathrm{W/m^2 \cdot {}^\circ C}$이다. 원통의 벽은 두께가 0.8 mm이고 열전도계수는 16 W/m · °C 이다. 원통의 외부는 $h_o = 7.6\ \mathrm{W/m^2 \cdot {}^\circ C}$ 자연대류에 의하여 열손실이 발생한다. 총괄열전달계수 및 단위길이당 열손실을 구하여라. 단, 원통 주위 공기의 온도는 20°C 이다.

이 문제에서는 식 (2.14)에서 설명한 바와 같이 연속적으로 세 개의 저항을 생각할 수 있다. $L = 1.0$ m, $d_i = 0.025$ m, $d_o = 0.025 + (2)(0.0008) = 0.0266$ m 이므로 저항은 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{(3500)\pi(0.025)(1.0)} = 0.00364\ {}^\circ\mathrm{C/W}$$

$$R_t = \frac{\ln(d_o/d_i)}{2\pi k L} = \frac{\ln(0.0266/0.025)}{2\pi(16)(1.0)} = 0.00062\ {}^\circ\mathrm{C/W}$$

$$R_o = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{(7.6)\pi(0.0266)(1.0)} = 1.575\ {}^\circ\mathrm{C/W}$$

분명히 외부대류저항이 가장 크게 나타나고 있으며, 이 저항은 전체 저항에서 지배적인 값임을 보여준다. 다른 저항은 상대적으로 작기 때문에 무시될 수도 있다. 따라서 총괄열전달계수를 원통벽 바깥면의 면적에 대하여 구한다.

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} = U_o A_o \Delta T \tag{a}$$

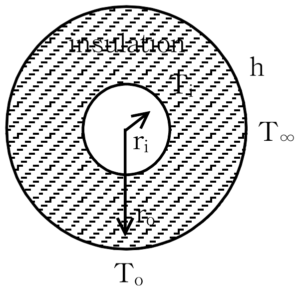
$$U_o = \frac{1}{A_o \sum R} = \frac{1}{[\pi(0.0266)(1.0)](0.00364 + 0.00062 + 1.575)} = 7.577\ \mathrm{W/m^2 \cdot {}^\circ C}$$

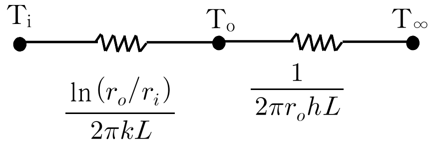
이 값은 원통 외부의 대류열전달계수 $h_o = 7.6\ \mathrm{W/m^2 \cdot {}^\circ C}$와 거의 같다. 식 (a)로부터 얻은 열손실은 다음과 같다.

$$q = U_o A_o\ \Delta T = (7.577)\pi(0.0266)(1.0)(50 - 20) = 19\ \mathrm{W}\ \text{(단위길이당)}$$

이 예제는 많은 실제 열전달 문제가 이와 같이 연속적인 열저항의 결합으로 작용하는 복합적 형태로 나타난다는 점에 중점을 두고 있다. 한 가지 열전달 형태가 복합된 열전달 문제를 지배하는 경우는 흔히 있다. 여기 예제에서도 총 열전달은 거의 50°C로 유지되는 원통의 바깥벽으로부터 자연대류 열손실만 계산함으로써 구할 수 있다. 왜냐하면 원통 내부에서의 대류저항 및 벽의 전도저항이 매우 작기 때문에 원통벽 내부면과 외부면 사이의 온도 차이가 매우 작게 된다.

2.6 단열의 임계두께(critical thickness)



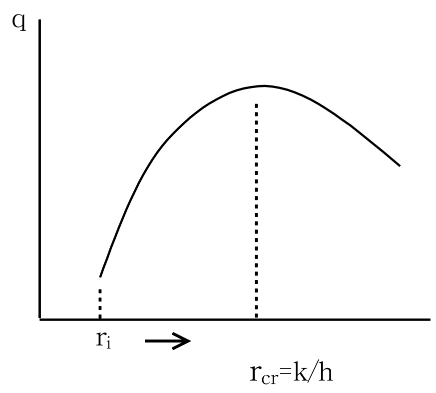


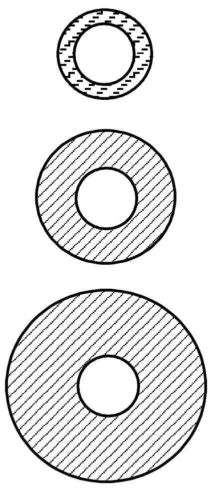
따라서 $q = \dfrac{(T_i - T_\infty)}{\dfrac{\ln(r_o/r_i)}{2k\pi L} + \dfrac{1}{2\pi r_o hL}} = \dfrac{2\pi L(T_i - T_\infty)}{\dfrac{\ln(r_o/r_i)}{k} + \dfrac{1}{r_o h}}$

q가 최대인 외부반지름 r_o은 다음과 같이 구한다.

$$\frac{dq}{dr_o} = 0 = \frac{-2\pi L(T_i - T_\infty)\left(\dfrac{1}{kr_o} - \dfrac{1}{hr_o^2}\right)}{\left[\dfrac{\ln(r_o/r_i)}{k} + \dfrac{1}{r_o h}\right]^2} \quad \Rightarrow \quad r_o = r_{cr} = \frac{k}{h} \text{ (임계단열두께)}$$

Note : 분수함수 미분 $\Rightarrow q = \dfrac{f}{g}$이다 따라서 $q' = \dfrac{d}{dr_o}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$





$r_o < r_{cr}$: 단열재 붙여도 q 증가

$r_o = r_{cr}$: q 최대

$r_o > r_{cr}$: 단열재 붙이면 q 감소

* 단열재를 두껍게 하면 단열재에 의한 열저항이 증가하여 전도열전달은 감소하나, 오히려 외부표면적이 증가하여 대류에 의한 열전달은 증가하는 상반된 현상이 일어난다.

예제 2-6 임계단열두께

석면($k = 0.17$ W/m · °C)으로 둘러싸인 지름이 5 cm이고 벽온도가 200°C인 관이 $h = 3.0$ W/m²· °C인 20°C 의 실내에 노출되어 있을 때 단열의 임계반지름을 구하여라. 또 임계반지름의 단열재로 싸여 있을 때와 단열재가 없을 때 관으로부터의 열손실을 계산하여라.

식 (2.18)로부터 r_o는 다음과 같이 계산된다.

$$r_o = \frac{k}{h} = \frac{0.17}{3.0} = 0.0567 \text{ m} = 5.67 \text{ cm}$$

단열재 내부반지름은 5.0/2 = 2.5 cm이고, 열전달은 식 (2.17)로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi\,(200 - 20)}{\dfrac{\ln\,(5.67/2.5)}{0.17} + \dfrac{1}{(0.0567)(3.0)}} = 105.7 \text{ W/m}$$

단열재가 없을 때 관의 바깥표면으로부터의 대류열전달은

$$\frac{q}{L} = h(2\pi r)(T_i - T_o) = (3.0)(2\pi)(0.025)(200 - 20) = 84.8 \text{ W/m}$$

단열두께가 3.17 cm (5.67 − 2.5)만큼 증가함으로써 열손실이 25%정도 증가함을 알 수 있다.

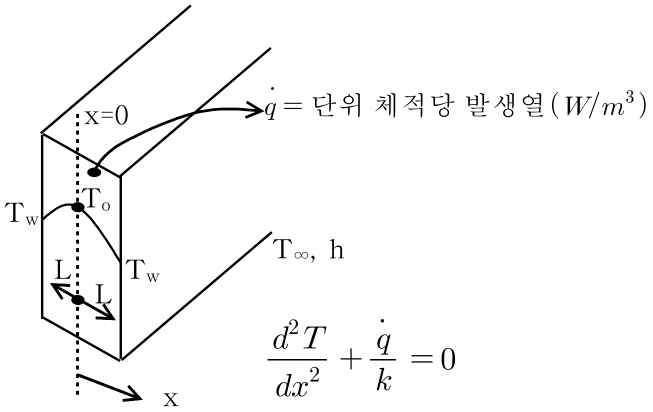
한편, 열전도계수가 0.04 W/m· °C인 섬유유리를 단열재로 사용할 경우 임계단열 두께는 다음과 같다.

$$r_o = \frac{k}{h} = \frac{0.04}{3.0} = 0.0133 \text{ m} = 1.33 \text{ cm}$$

그러므로 임계반지름이 관의 외부반지름(2.5 cm)보다 작은 섬유유리 단열재인 경우는 관 외부에 붙이면 열손실을 줄여준다. 실제로 관의 단열 문제에서는 단열면 외부 표면에서 대류열전달과 더불어 복사열전달의 영향도 받는다.

2.7 열원계

∘ 발열원($\dot{q}$)이 있는 평판벽



(가정) 1차원 정상상태
k=constant
일정하게 분포된 발열원

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

두 번 적분 : $T = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$ · (A)

at x=+L : $T_w = -\frac{\dot{q}}{2k}L^2 + C_1L + C_2$

x=-L : $T_w = -\frac{\dot{q}}{2k}L^2 - C_1L + C_2$

경계조건 : ① at x=±L, T=T_w ⇒ $C_1=0$

② x=0, T=T_o, ⇒ $C_2=T_0$

이제 C_1, C_2를 식(A)에 대입하면 ⇒ $T - T_0 = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2$ · · · · · · · · · · · · · · · · (B)

식(B)에 x=±L에서 T=T_w를 적용하면 ⇒ $T_w - T_0 = -\frac{\dot{q}}{2k}L^2$ · · · · · · · · · · · · (C)

$(B)-(C) = T - T_w = -\frac{\dot{q}}{2k}(x^2 - L^2)$ · (D)

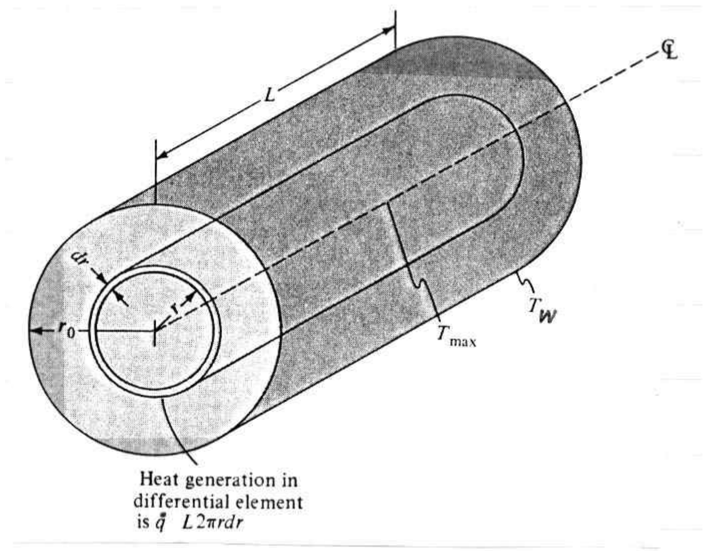
$\frac{(B)}{(C)} = \frac{T-T_0}{T_w-T_0} = \frac{x^2}{L^2}$, $\frac{(D)}{(C)} = \frac{T-T_w}{T_0-T_w} = 1 - \frac{x^2}{L^2}$

식(C)로부터 중심부의 온도를 구하면 ⇒ $T_0 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_w$

Note: 평판벽에서 발생된 열과 벽의 양면에서 전도에 의한 열전달량이 같아야 한다.

따라서 $\dot{q}A2L = 2(-kA\frac{dT}{dx}|_{x=L})$

2.8 열원을 갖는 원통(Solid Cylinder)

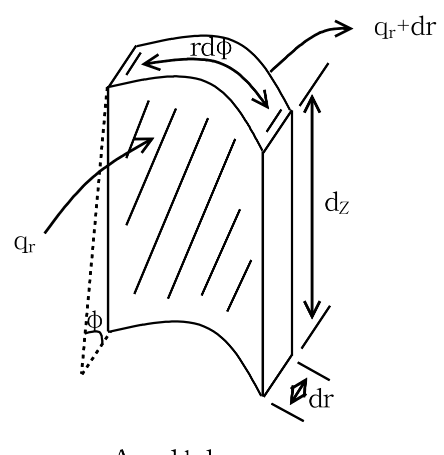


가정) 1차원 정상상태, 충분히 긴 원통

반경=R, k=constant, 균일하게 분포된 발열원

식(1.3b) $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2T}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dT}{dr}+\dfrac{\dot{q}}{k}=0$ 또는 $\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dT}{dr})+\dfrac{\dot{q}}{k}r=0$

∵식(1.3b)유도 :



$$q_r=-Ak\frac{dT}{dr}=-rd\phi dz\cdot k\frac{dT}{dr}$$

$q_r+\dot{q}V=q_{r+dr}$ 에서

$$(-rd\phi dz\,k\frac{dT}{dr})+\dot{q}\,rd\phi dzdr=\left[-rd\phi dz\,k\frac{dT}{dr}+\frac{d}{dr}(-rd\phi dz\,k\frac{dT}{dr})dr\right]$$

$$\frac{d}{dr}(rd\phi dz\,k\frac{dT}{dr})dr=-\dot{q}rd\phi dz\,dr$$

정리하면 $\Rightarrow$ $\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dT}{dr})=-\dfrac{\dot{q}}{k}r$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2T}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dT}{dr}+\dfrac{\dot{q}}{k}=o$

A=rdφdz

V=rdφdzdr

$\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dT}{dr})=-\dfrac{\dot{q}}{k}r$ 를 적분하면

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{q}}{2k}r^2+C_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

$$T=-\frac{\dot{q}r^2}{4k}+C_1\ln r+C_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(B)}$$

경계조건 1) 내부 발생열 = 표면에서의 열손실

$$\dot{q}(\pi R^2 L) = -k(2\pi RL)\frac{dT}{dr}\Big|_{r=R} \Rightarrow \frac{dT}{dr}\Big|_{r=R} = -\frac{\dot{q}R}{2k} \cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

$$\frac{식(A)}{r} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k}r + \frac{C_1}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots (D)$$

식(C) = 식(D) $|_{r=R}$ ⇒ $C_1=0$

경계조건 2) $T=T_w$ at $r=R$ ⇒ 식(B)에 적용

$T = T_w = -\frac{\dot{q}R^2}{4k} + C_2$, 따라서 $C_2 = T_w + \frac{\dot{q}R^2}{4k}$

C_1, C_2를 식(B)에 대입, $T - T_w = \frac{\dot{q}}{4k}(R^2 - r^2) \cdots\cdots\cdots\cdots (E)$

중심부(r=0)에서의 온도(T_0)를 식(E)로부터 ⇒ $T_0 = \frac{\dot{q}R^2}{4k} + T_w \cdots\cdots (F)$

- **무차원 온도함수** : 식(E)/식(F) ⇒ $\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$

◦ **열원이 균일하게 분포된 hollow cylinder의 경우**

두 경계조건: $T=T_i$ at $r=r_i$(내부면), $T=T_0$ at $r=r_0$(외부면)

온도분포는 $T = \frac{-\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$ 이며 두 경계조건을 적용한다:

$r = r_i$; $T = T_i = \frac{-\dot{q}r_i^2}{4k} + C_1 \ln r_i + C_2$

$r = r_0$; $T = T_0 = \frac{-\dot{q}r_o^2}{4k} + C_1 \ln r_o + C_2$을 풀어서

온도함수를 구한다 ⇒ $T = T_o + \frac{\dot{q}}{4k}(r_o^2 - r^2) + C_1 \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)$

여기에서 $C_1 = \frac{(T_i - T_0) + \dot{q}(r_i^2 - r_o^2)/4k}{\ln(r_i/r_o)}$

예제 2-7 대류 속에 놓인 열원

200 A의 전류가 지름이 3 mm인 스테인레스강 철선($k = 19$ W/m · °C)을 통해서 흐르고 있다. 이 강철선의 비저항(resistivity)은 70 $\mu\Omega$ · cm이고 길이는 1 m이다. 110°C로 유지되는 액체 속에 강철선이 잠겨 있을 때 이 선 중심에서의 온도를 계산하여라. 단, 강철선과 액체 사이의 대류열전달계수는 4 kW/m^2 · °C라고 가정하여라.

■ 풀이

스테인레스강 철선에 전류가 통하여 생긴 모든 열은 대류에 의하여 액체 속으로 전달된다.

$$P = I^2R = q = hA\,(T_w - T_\infty) \tag{a}$$

강철선의 저항은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R = \rho\,\frac{L}{A} = \frac{(70 \times 10^{-6})(100)}{\pi(0.15)^2} = 0.099\ \Omega$$

여기서 ρ는 스테인레스강 철선의 비저항이다. 강철선의 표면적은 πdL이기 때문에 식 (a)로부터

$$(200)^2(0.099) = 4000\pi(3 \times 10^{-3})(1)(T_w - 110) = 3960\ \text{W}$$

그러므로

$$T_w = 215°\text{C} \quad [419°\text{F}]$$

이다. 단위체적당 발생된 열량 $\dot{q}$ 는 다음 식에서 계산할 수 있다.

$$P = \dot{q}\ V = \dot{q}\ \pi r^2 L$$

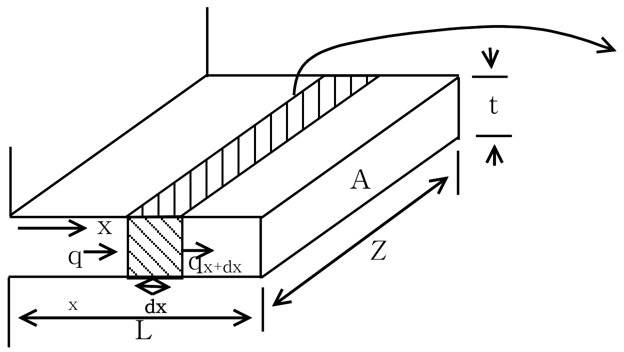
그러므로

$$\dot{q} = \frac{3960}{\pi\,(1.5 \times 10^{-3})^2(1)} = 560.2\ \text{MW/m}^3 \quad [5.41 \times 10^7\ \text{Btu/h} \cdot \text{ft}^3]$$

마지막으로, 강철선의 중심온도는 식 (2.26)으로부터 계산된다.

$$T_0 = \frac{\dot{q}r_o^2}{4k} + T_w = \frac{(5.602 \times 10^8)(1.5 \times 10^{-3})^2}{(4)(19)} + 215 = 231.6°\text{C} \quad [449°\text{F}]$$

2.9 전도-대류계



$dq_{conv} = hPdx(T - T_\infty),\ P = perimeter$

$Pdx = heat\ transfer\ area$

<가정>

◦ 1차원 핀

◦ T_0= 핀 바닥면 온도

◦ T_∞=주위 유체 온도

◦ fin의 x방향 면적=균일

◦ x방향의 열전달이 y, z 방향보다 훨씬큼

[그림 2.9] 직사각형 핀에서의 1차원 전도 및 대류 열전달

<검사체적의 열평형>

$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv.}$

$q_x = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx + hPdx(T - T_\infty)$

$-kA\frac{dT}{dx} = -kA\frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx}(-kA\frac{dT}{dx})dx + hPdx(T - T_\infty)$

$-kA\frac{d^2T}{dx^2} + hP(T - T_\infty) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0$ ....(2.30a)

$T - T_\infty = \theta$로 대입하고 $m^2 = \frac{hP}{kA}$으로 놓으면, $\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$의 상미분방정식이 된다. ......(2.30b)

이 미분방정식의 일반해 : $\theta = C_1e^{-mx} + C_2e^{mx}$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · (2.31)

- 경계조건에 의해 C_1과 C_2 계산 :

◦ 경계조건 1) x=0에서 $T=T_0$을 변형하여 ⇒ $T-T_\infty=T_0-T_\infty$ ⇒ $\Theta=\Theta_0$

◦ 경계조건 2)

경우① : 핀이 매우길 때 (핀 끝의 온도 = 주위 유체의온도) : $T=T_\infty$이므로 $\Theta=0$ at $x=\infty$

경우② : 핀 끝에서 대류에 의한 열손실: x=L에서 $hA\theta_L = -kA\frac{d\theta}{dx}|_{x=L}$ 여기에서 $\theta_L = T_L - T_\infty$

(핀 끝에서 전도 열손실 = 대류 열손실)

경우③ : 핀 끝이 단열된 경우 : x=L에서 $\frac{dT}{dx}|_{x=L} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{d\theta}{dx}|_{x=L} = 0$

- 경우① : x=0에서 $\Theta=\Theta_0$ $\Theta=C_1e^{-mx}+C_2e^{mx}$에 대입하면 $\Theta_0=C_1+C_2$이 되고

x=∞에서 $\Theta=0$ $0=C_2e^{\infty}$이 되어서 두 식에서 $C_2=0$, $C_1=\Theta_0$를 얻고

$\therefore\ \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx}$ 를 구한다. ....(2.32)

- 경우③ : x=0, $\Theta=\Theta_0$ 과 x=L, $\frac{d\theta}{dx}|_{x=L}=0$에서 $\Theta_0=C_1+C_2$

$0=m[-C_1e^{-mL}+C_2e^{mL}]$ 두식에서 상수 C_1, C_2를 구하면

$$\therefore \frac{\theta}{\theta_0}=\frac{e^{-mx}}{1+e^{-2mL}}+\frac{e^{mx}}{1+e^{2mL}} \quad \cdots\cdots (2.33a)$$

정리하면 $$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh mL} \quad \cdots\cdots (2.33b)$$

- 경우② : x=0, $\Theta=\Theta_0$와 x=L, $h\theta_L=-k\frac{d\theta}{dx}|_{x=L}$를 적용한 결과

$\Theta_0=C_1+C_2$, $h[C_1e^{-mL}+C_2e^{mL}]=km[C_1e^{-mL}-C_2e^{mL}]$로부터 C_1과 C_2를 구하고

공식(2.31)에 대입하면 $$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{\cosh m(L-x)+(\frac{h}{mk})\sinh m(L-x)}{\cosh mL+(\frac{h}{mk})\sinh mL} \quad \cdots\cdots (2.34)$$

The hyperbolic functions (쌍곡선함수)는 다음과 같이정의된다 : $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

◦ 핀 바닥면에서부터 핀 끝까지의 열전달

$q=-kA\frac{d\theta}{dx}|_{x=0}$: 핀 바닥면에서의 전도 열전달 = $\int_0^L hP\theta dx$: 핀 전체에서의 대류 열전달

- 경우① : $q=-kA\frac{d\theta}{dx}|_{x=0}=-kA\frac{d}{dx}(\theta_0e^{-mx})|_{x=0}=-kA(-m\theta_0e^{-m(0)})=\sqrt{hPkA}\,\theta_0$ $\cdots\cdots$ (2.35)

여기에서 $m^2=\frac{hP}{kA}$

- 경우② : $$q=-kA\frac{d\theta}{dx}|_{x=0}=-kA\frac{d}{dx}\left(\theta_0\frac{\cosh m(L-x)+\left(\frac{h}{mk}\right)\sinh m(L-x)}{\cosh mL+\left(\frac{h}{mk}\right)\sinh mL}\right)$$

$$=+kA\theta_0\frac{m\left[\sinh m(L-x)+\left(\frac{h}{mk}\right)\cosh m(L-x)\right]}{\cosh mL+\left(\frac{h}{mk}\right)\sinh mL}|_{x=0}$$

$$=\sqrt{hPkA}\,\theta_0\left[\frac{\sinh mL+\left(\frac{h}{mk}\right)\cosh mL}{\cosh mL+\left(\frac{h}{mk}\right)\sinh mL}\right]$$

- 경우③ : $q=\sqrt{hPkA}\,\theta_0\tanh mL$ $\cdots\cdots$ (2.36)

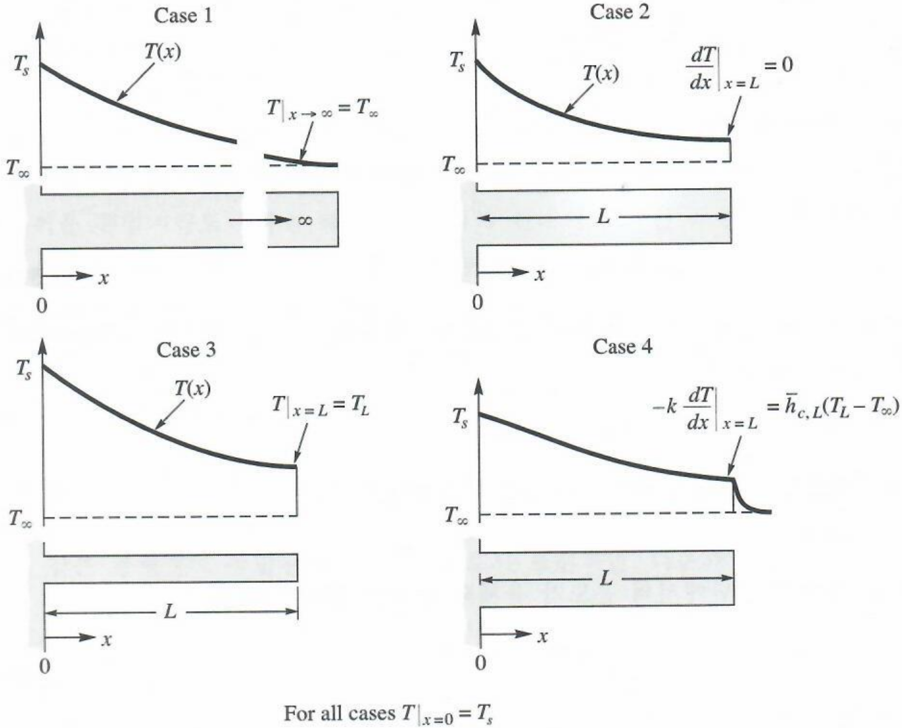


그림 2.15 휜의 끝단에서의 네 가지 경계조건에 대한 개략적 도시

2-10 핀(fin)

A. 핀 효율(fin efficiency) $\eta_f = \dfrac{\text{실제로 발생하는 열전달량}}{\text{핀전체가 바닥면 온도와 같다고 가정할 때의 열전달량}}$

핀 전체가 바닥면에서의 온도와 같을 때의 열전달량 $\Rightarrow \displaystyle\int_0^L hP(T_0 - T_\infty)dx = hP\theta_0 L$

Reminder: $m^2 = \dfrac{hP}{kA}$

○ **경우③ (핀 끝이 단열됨) :** $\eta_f = \dfrac{\sqrt{hkPA}\,\theta_0 \tanh mL}{hP\theta_0 L} = \dfrac{\tanh mL}{mL}$

- Z(폭) $\gg$ t(두께)인 사각형 핀의경우 다음과 같이 변형 :

$$mL = \sqrt{\frac{hP}{kA}}\,L = \sqrt{\frac{h}{k}\frac{(2Z+2t)}{Zt}}\,L \approx \sqrt{\frac{2h}{kt}}\,L = \sqrt{\frac{2h}{kLt}}\,L^{3/2}$$

$$\therefore\ mL = \sqrt{\frac{2h}{kA_m}}\,L^{3/2}, \quad A_m = Lt$$

○ **경우② (핀 끝에서 대류에 의한 열전달) :**
핀 끝이 단열된 **경우③의** 모든 공식에서 핀의 길이 L을 수정길이 L_c로 바꾸어서 사용한다.

$$\therefore\ mL_c = \sqrt{\frac{2h}{kA_m}}\,L_c^{3/2}, \quad A_m = L_c t\ , \quad \eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}\ , \ q = \sqrt{hPkA}\,\theta_0 \tanh mL_c$$

1) 평판에 돌출한 두께가 t이고 길이가 L인 직사각형 단면의 핀 : $L_c = L + t/2$

2) 평판에 돌출한 지름이 d이고 길이가 L인 원통형 핀 : $L_c = L + \dfrac{\pi d^2/4}{\pi d} = L + d/4$

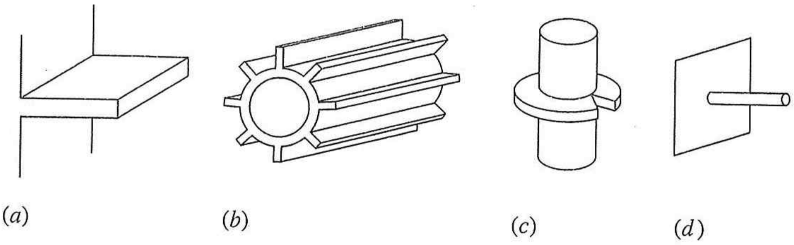
B. 핀 효용도(fin effectiveness) $\eta_e = \dfrac{\text{핀이 부착된 경우의 열전달량}(q)}{\text{핀이 부착되지 않는 경우의 열전달량}(q)} = \dfrac{\eta_f A_f h\theta_o}{hA_b\theta_o}$

여기에서 A_f : 핀의 전체 표면적 ($= PL$), A_b : 핀 바닥면에서의 단면적 ($= A$)

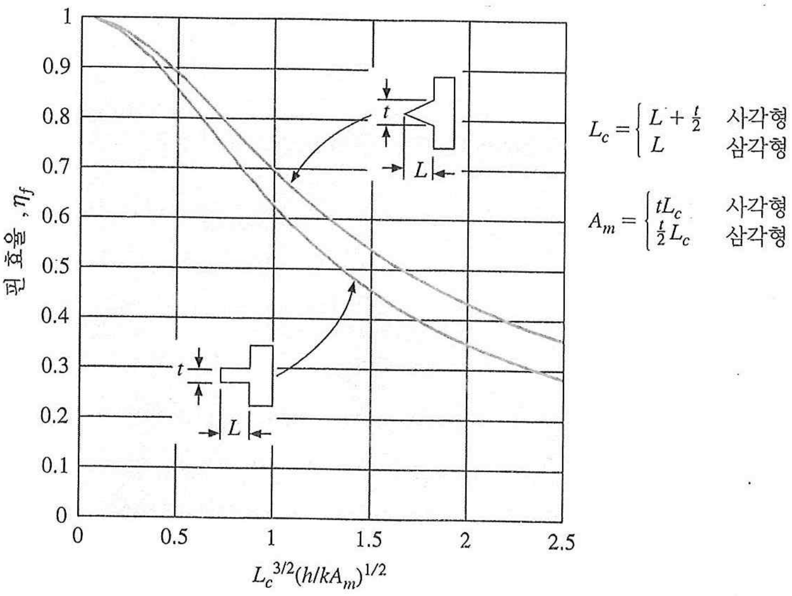
○ 경우③ (핀 끝이 단열됨) :

$$\eta_e = \frac{\text{핀이 부착된 경우의 열전달량}}{\text{핀이 부착되지 않는 경우의 열전달량}} = \frac{\sqrt{hPkA}\,\theta_o \tanh mL}{hA_b\theta_o} = \frac{\sqrt{hPkA}\,\theta_o \tanh mL}{hA\,\theta_o} = \frac{\tanh mL}{\sqrt{hA/kP}}$$

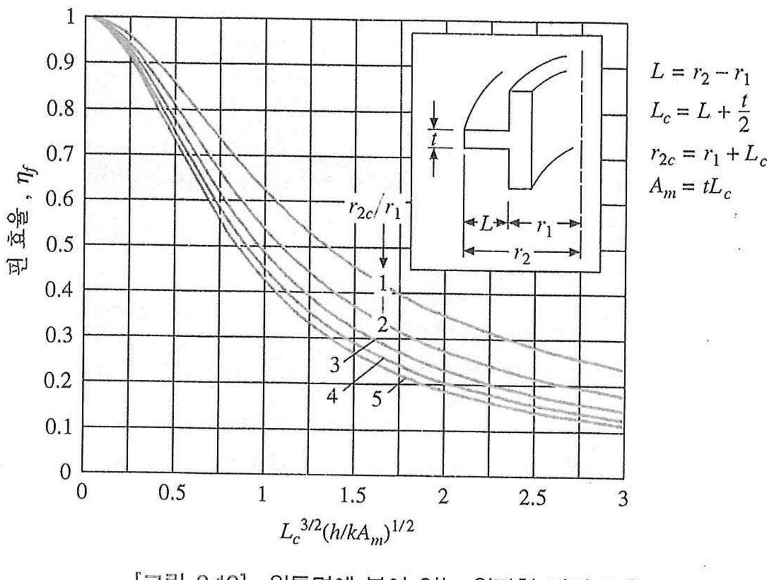
○ **핀이 반드시 열전달 촉진에 도움이 되지 않는 경우도 있다.**
- 핀 효용도 (η_e)가 낮은경우 : 고속으로 흐르는 액체 혹은 비등 혹은 응축 현상이 일어나는 경우.



[그림 2.10] 여러 가지 형태의 핀 (a) 평판벽면에 돌출한 직사각형 단면의 곧은 핀, (b) 원통형 튜브에 돌출한 직사각형 단면의 곧은 핀, (c) 원통 표면에 붙어 있는 원판형 핀, (d) 평판에 돌출한 원통형 핀



[그림 2.11] 사각형 및 삼각형 핀의 효율



[그림 2.12] 원통면에 붙어 있는 원판형 핀의 효율

예제 2-9 평판형 알루미늄 핀

두께가 3.0 mm이고 길이가 7.5 cm인 알루미늄 핀($k = 200 \mathrm{W/m \cdot °C}$)이 그림 2.9와 같이 벽으로부터 돌출되어 있다. 핀의 바탕온도는 300°C 이고 주위유체의 온도는 50°C 이며 $h = 10 \mathrm{~W/m^2 \cdot °C}$일 때 핀의 단위 폭당 열손실을 계산하여라.

이 문제는 앞에서 경우 2에 해당한다. 따라서 구하는 열손실은 수정길이 L_c를 사용하여 식 (2.36)에 의해서 주어진 단열된 끝을 가진 핀으로부터 전달되는 열전달을 계산하면 된다.

$$L_c = L + t/2 = 7.5 + 0.15 = 7.65 \mathrm{~cm~} [3.01 \mathrm{~in}]$$
$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \left[\frac{h(2z+2t)}{ktz}\right]^{1/2} \approx \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

$z \gg t$ 인 경우. 따라서

$$m = \left[\frac{(2)(10)}{(200)(3\times 10^{-3})}\right]^{1/2} = 5.774$$

식 (2.36)에서 끝이 단열된 핀에 대하여

$$q = (\tanh mL_c)\sqrt{hPkA}\,\theta_0$$

이며, 1 m의 폭에 대해서는

$$A = (1)(3\times 10^{-3}) = 3\times 10^{-3} \mathrm{~m^2~} [4.65 \mathrm{~in^2}]$$

이고, 열손실은 다음과 같다.

$$q = (5.774)(200)(3\times 10^{-3})(300-50)\tanh[(5.774)(0.0765)]$$
$$= 359 \mathrm{~W/m~} [373.5 \mathrm{~Btu/h \cdot ft}]$$

예제 2-10 원판형 알루미늄 핀

길이가 1.5 cm이고 두께가 1 mm인 원판형 알루미늄 핀(k = 200 W/m · ℃)이 지름이 2.5 cm인 원통에 달려 있다.

원통벽의 온도는 170℃이고 주위유체의 온도는 25℃이다. 열전달계수가 130 W/m^2 · ℃일 때 핀으로부터의 열손실을 구하여라.

풀이

그림 2.12에 주어진 핀효율 곡선을 이용하여 아래와 같이 열손실을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
L_c = L + t/2 &= 1.5 + 0.05 = 1.55 \text{ cm} \\
r_1 &= 2.5/2 = 1.25 \text{ cm} \\
r_{2c} = r_1 + L_c &= 1.25 + 1.55 = 2.80 \text{ cm} \\
r_{2c}/r_1 &= 2.80/1.25 = 2.24 \\
A_m = t(r_{2c} - r_1) &= (0.001)(2.8 - 1.25)(10^{-2}) = 1.55 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \\
L_c^{3/2}\left(\frac{h}{kA_m}\right)^{1/2} &= (0.0155)^{3/2}\left[\frac{130}{(200)(1.55 \times 10^{-5})}\right]^{1/2} = 0.396
\end{aligned}$$

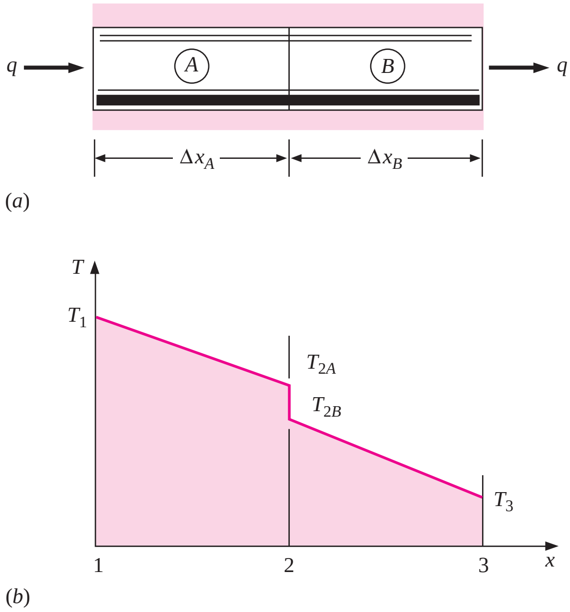
그림 2.12로부터 $\eta_f = 82\%$이다. 핀의 모든 부분에서의 온도가 바탕온도와 같을 경우 열전달은

$$\begin{aligned}
q_{\max} &= 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)h(T_0 - T_\infty) \\
&= 2\pi(2.8^2 - 1.25^2)(10^{-4})(130)(170 - 25) \\
&= 74.35 \text{ W } [253.7 \text{ Btu/h}]
\end{aligned}$$

이다. 구하려고 하는 열손실은 위에서 구한 열전달률과 핀의 효율을 곱하면 된다.

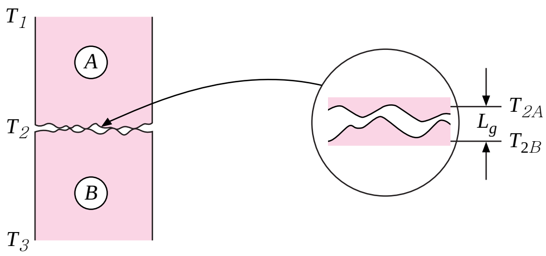
$$q_{\text{act}} = (0.82)(74.35) = 60.97 \text{ W}[208 \text{ Btu/h}]$$

2-11 접촉 열저항



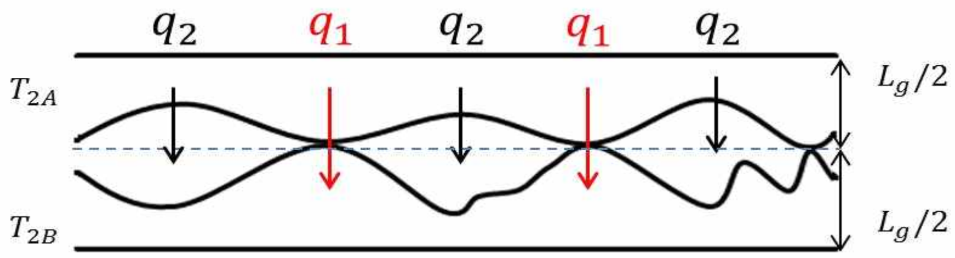
[그림 2.15] 접촉 열저항의 효과. (a)물리적 상태, (b) 온도분포

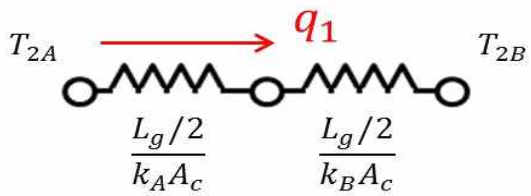
Note : 평면 2에서의 온도강하는 접촉 열저항 때문이다.



[그림 2.16] 접촉 열저항을 설명하기 위한 접촉부의 조도모형

1. Solid-to-Solid Conduction





A_c: Contact area

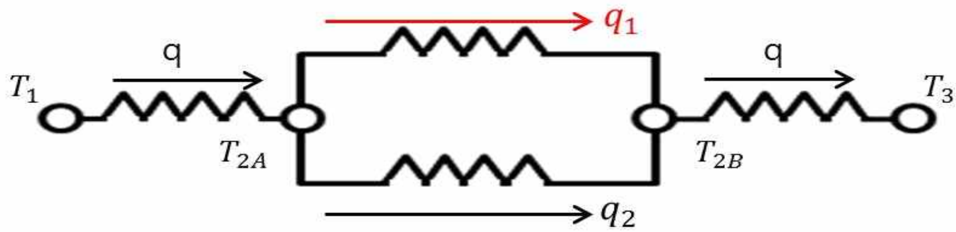
$$q_1 = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{\frac{L_g}{2k_A A_c} + \frac{L_g}{2k_B A_c}}$$

2. Conduction through entrapped gases

$$q_2 = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{\frac{L_g}{k_f A_v}}$$

A_v: Void area

$$\therefore q = q_1 + q_2$$



여기에서 L_g: 빈 공간의 두께, k_f: 빈 공간내 유체의 열전도

◦ 접촉하는 두 고체에서의 에너지 평형식

$$q = k_A A \frac{T_1 - T_{2A}}{\triangle x_A} = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{1/h_c A} = k_B A \frac{T_{2B} - T_3}{\triangle x_B} = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\triangle x_A}{k_A A} + \frac{1}{h_c A} + \frac{\triangle x_B}{k_B A}}$$

여기에서, $\frac{1}{h_c A}$: 접촉 열저항, h_c : 접촉계수 (표2-3)

◦ 접촉부에서의 전도 열전달

1) 접촉점에서의 고체간의 열전달 q_1 2) 접촉부 내의 미세한 빈 공간내의 유체를 통한 열전달 q_2

$$q = q_1 + q_2 = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{\frac{L_g/2}{k_A A_c} + \frac{Lg/2}{k_B A_c}} + \frac{T_{2A} - T_{2B}}{\frac{L_g}{k_f A_v}} = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{\frac{1}{h_c A}}$$

A_c: 고체 간의 접촉면적, A_v: 빈 공간의 유체와의 접촉면적, A: 막대의 총단면적(= A_c+A_v)

따라서, 접촉계수 $h_c = \frac{1}{L_g}\left[\frac{A_c}{A}\frac{2k_A k_B}{(k_A + k_B)} + \frac{A_v}{A}k_f\right]$

$k_f \ll k_A,\ k_B$ 이므로 대부분의 접촉 열저항은 빈 공간의 유체 접촉면적(A_v)에 의해 결정된다.

Note: $$\frac{T_1 - T_3}{\frac{\triangle x_A}{k_A A} + \frac{1}{h_c A} + \frac{\triangle x_B}{k_B A}} = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{\frac{1}{h_c A}}$$

◦ 접촉 열저항을 줄이는 3가지 방법

1) 빈 공간내의 유체의 압력을 다음의 조건이 되도록 높힌다.
(mean free path of the molecules < characteristic dimension of the void space(빈 공간))
2) 접촉점에서의 압력을 증가하여 접촉 면적을 증가시킨다.
3) Dow 340와 같은 “Thermal Grease or Thermally Conductive Paste”를 접촉면에 바른다 – 접촉 열저항을 75%까지 줄일 수 있다. 최근에는 인제대에서 Graphene을 Paste형태로 만들어서 사용함.

[표 2.3] 대표적인 표면에서의 접촉 열저항

표면상태	조도 μin	조도 μm	온도, °C	압력, atm	$1/h_c$ h · ft^2 · °F/Btu,	$1/h_c$ m^2 · °C/W × 10^4
416 스테인레스강, 연삭가공, 공기	100	2.54	90-200	3~25	0.0015	2.64
304 스테인레스강, 연삭가공, 공기	45	1.14	20	40~70	0.003	5.28
416 스테인레스강, 연삭가공, 0.001-in 황동 끼움쇠 달림, 공기	100	2.54	30-200	7	0.002	3.52
알루미늄, 연삭가공, 공기	100	2.54	150	12~25	0.0005	0.88
	10	0.25	150	12~25	0.0001	0.18
알루미늄, 연삭가공, 0.001-in 황동끼움쇠 달림, 공기	100	2.54	150	12~200	0.0007	1.23
구리, 연삭가공, 공기	50	1.27	20	12~200	0.00004	0.07
구리, 밀링가공, 공기	150	3.81	20	10~50	0.0001	0.18
구리, 밀링가공, 진공	10	0.25	30	7~70	0.0005	0.88

예제 2-12 접촉 열저항의 영향

길이가 10 cm이고 지름이 3 cm인 2개의 304스테인레스강 막대의 접촉표면이 연삭가공 되었고 조도(roughness)는 약 1 μm이다. 이 두 막대를 공기 속에서 50 atm으로 압축하여 접촉시켰고 접촉한 두 막대의 양쪽 끝의 온도차가 100 °C일 때 축방향의 열전달과 접촉면에서의 온도강하를 구하여라.

■ 풀이

총 열유동은 3개의 열저항을 가진다. 즉, 각 막대에서의 전도 열저항 및 접촉 열저항이다. 각 막대에서의 열저항은

$$R_{\text{th}} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{(0.1)(4)}{(16.3)\pi(3\times10^{-2})^2} = 8.679°\text{C/W}$$

접촉 열저항은 표 2.2로부터 다음과 같이 계산된다.

$$R_c = \frac{1}{h_c A} = \frac{(5.28\times10^{-4})(4)}{\pi(3\times10^{-2})^2} = 0.747°\text{C/W}$$

따라서 총 열저항은

$$\sum R_{\text{th}} = (2)(8.679) + 0.747 = 18.105$$

총 열유동은

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R_{\text{th}}} = \frac{100}{18.105} = 5.52\ \text{W} \quad [18.83\ \text{Btu/h}]$$

접촉표면을 가로지르는 온도강하는 총 열저항에 대한 접촉저항의 비로 구할 수 있다.

$$\Delta T_c = \frac{R_c}{\sum R_{\text{th}}}\Delta T = \frac{(0.747)(100)}{18.105} = 4.13°\text{C} \quad [39.43°\text{F}]$$

이 문제에서 접촉저항은 총 열저항의 약 4%로 나타난다.