0.1 다항식과 유리함수

- 실수와 부등식

실수는 유리수와 무리수로 구성되어 있으며, 유리수는 자연수와 정수를 포함

자연수 = {1, 2, 3, 4, ⋯}
정수 = $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$
유리수 = $\{\frac{p}{q} : p, q$ 는 정수, $q \neq 0\}$

순환 소수는 유리수이다 예) 1/3=0.33333…, 1/6=0.16666…

무한 소수는 무리수이다. 예) $\sqrt{2}$ =1.41421…, π=3.14159… , e=2.71828…

실수 전체의 집합을 기호 R로 나타낸다.

두 실수 a, b에 대하여 a<b인 경우, 폐구간 [a, b], 개구간 (a ,b)로 표시

Chapter. 4 적분 (Integration)

목적: 예) 물체의 가속도 함수로부터 역으로 그 물체의 위치 함수를 계산하는 법을 배운다

- 4.1 역도함수 (Antiderivative)

함수 f(x)가 주어질 때, F'(x) = f(x)인 함수 F(x)를 f(x)의 역도함수라고 한다.

이 때, f(x)의 부정적분 (Indefinite Integral)은 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$로 정의한다.

여기에서 f(x) : 피적분함수 (Integrand), dx : 적분변수 (Variable of Integration)

이렇게 적분을 계산하는 과정을 적분법 (Integration) 이라 한다.

(정리 1.2) 거듭제곱법칙 (Power Rule)

- 임의의 유리수 r≠-1 에 대하여 $\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$

<예제> $$\int 3x^2 \, dx = 3\frac{x^3}{3} + C = x^3 + C, \qquad \int t^5 \, dt = \frac{t^6}{6} + C$$

- 음의 지수에 대한 거듭제곱 법칙

<예제> $$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} \, dx = \frac{x^{(-3+1)}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C$$

- 분수형태의 지수를 갖는 거듭제곱 법칙

<예제> $$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{3\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$$

- 주요 적분공식

$$\int sinx\,dx = -cosx + C$$

$$\int cosx\,dx = sinx + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = tanx + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -cotx + C$$

$$\int secx\,tanx\,dx = secx + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1} x + C$$

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + C$$

$$\int cscx\,cotx\,dx = -cscx + C$$

- 합의 부정적분

(정리 1.3) 임의의 상수 a와 b에 대하여

$$\int [af(x) + bg(x)]\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx$$

<예제> $$\int (3cosx + 4x^8)\, dx = 3\int cosx\, dx + 4\int x^8\, dx = 3sinx + \frac{4}{9}x^9 + C$$

- 차의 부정적분

<예제> $$\int (3e^x - \frac{2}{1+x^2})\, dx = 3\int e^x\, dx - 2\int \frac{1}{1+x^2} dx = 3e^x - 2\tan^{-1} x + C$$

(정리 1.4) x≠0 에 대하여 $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

정리 1.4의 미분법칙을 이용하면 x≠0 에 대하여 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ 이 된다

이제 정리 (1.4)와 연쇄법칙(Chain Rule)에 의하여 f(x)≠0이고 f(x)가 미분 가능하면

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

양변에 적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

위 식을 얻을 수 있다.

- $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 형태의 분수 함수의 적분

<예제>

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx = \ln|\tan x| + c.$$

<예제>

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + c = \ln(x^2+1) + c,$$

<예제> 적분법칙(거듭제곱법칙, 연쇄법칙)을 이용할 수 없는 적분

(1) $\int secx\, dx$

$\int \frac{f\prime(x)}{f(x)} dx$ 모양의 식이 되도록 피적분함수의 분모, 분자에 $\frac{secx+tanx}{secx+tanx}$을 곱해준다.

$$= \int \frac{secx(secx + tanx)}{secx + tanx} dx = \int \frac{\sec^2 x + secx\ tanx}{secx + tanx} \mathrm{dx} = \ln |tanx + secx| + C$$

- 치환적분법 : 치환함수의 도함수가 피적분함수의 일부인 경우 적용

(1\`) $\int secx\, dx = \int \frac{secx(secx + tanx)}{secx + tanx} dx$

$Set, u = secx + tanx, \qquad du = (secx\ tanx + \sec^2 x)dx$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |tanx + secx| + C$$

- 부분적분법 : $x^n,\ sinx,\ cosx,\ e^x$, lnx 형태의 함수들이 곱해져 있을 때 적용

(1) $\int x\ sin2x\ dx$

$$Set, u = x \qquad dv = sin2xdx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}cos2x$$

$$\int udv = uv - \int vdu = -\frac{1}{2}xcos2x - \int (-\frac{1}{2}cos2x)\ dx + C$$

$$= -\frac{1}{2}xcos2x + \frac{1}{2}\int cos2xdx + C$$

$$= -\frac{1}{2}xcos2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sin2x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}xcos2x + \frac{1}{4}sin2x + C$$

<예제> 낙하하는 물체의 위치를 계산하라

* 가정 : 공기저항 및 양력은 무시하고 중력가속도 만 계산에 사용

낙하하는 물체의 가속도 : $y''(t) = -32ft/s^2$
물체의 처음속도 : $y'(0) = -100\ \mathrm{ft/s}$
물체의 처음위치 : $y(0) = 100{,}000\ ft$

시간에 따른 물체의 위치함수 y(t)를 구하라

속도함수 $y'(t) = \int y''(t)dt = \int -32\,dt = -32t + C_1$

처음속도 $y'(0) = -100 = C_1$ $\quad\therefore C_1 = -100$

$\therefore y'(t) = -32t - 100\ (ft/s)$

위치함수 $y(t) = \int y'(t)\,dt = \int(-32t - 100)\,dt = -16t^2 - 100t + C_2$

처음위치 $y(0) = 100{,}000 = C_2$ $\quad\therefore C_2 = 100{,}000$

$\therefore y(t) = -16t^2 - 100t + 100000\ \ (ft)$

<연습문제 4-1>

<문제 7>   다음의 부정적분을 구하라

$$\int \frac{e^x}{e^x+3}dx = \ln|e^x+3| + C$$

- 다음 조건을 만족하는 함수 f(x)를 구하라

<문제 10 > $f'(x) = 3e^x + x,\ \ f(0) = 4$

$$f(x) = 3e^x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$f(0) = 3 + C = 4 \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore\ f(x) = 3e^x + \frac{x^2}{2} + 1$$

<문제 11 > $f''(\mathrm{x}) = 12\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}},\ f'(0) = 2,\ f(0) = 3$

$$f'(\mathrm{x}) = 4\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{C}_1$$

$$f'(0) = 2 + C_1 = 2 \quad \therefore C_1 = 0$$

$$f(x) = x^4 + 2e^x + C_1x + C_2$$

$$f(0) = 2 + C_2 = 3 \quad \therefore C_2 = 1$$

$$\therefore f(x) = x^4 + 2e^x + 1$$

<문제 17> 점(1,2)가 y=f(x) 그래프 상에 있고 이 점에서 접선기울기는 3이며 f″(x)=x-1인 함수 f(x)를 구하라

$$f''(x) = x - 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - x + C_1$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

조건 1. f(1)=2

조건 2. f′(1)=3 (접선기울기)

$$f'(1) = \frac{1}{2} - 1 + C_1 \qquad \therefore C_1 = \frac{7}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + C_1 + C_2 \qquad \therefore C_2 = -\frac{7}{6}$$

$$\therefore \; f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{2} - \frac{7}{6}$$

- 4.2 합과 ∑ 기호

합을 그리스 문자 ∑(Sigma)를 기호로 나타낸다. 적분한다는 것은 함수 아래 영역의 넓이를 구하는 것이다.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

<예제>

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{10} = \sum_{i=1}^{10} \sqrt{i}$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + 45^3 = \sum_{i=3}^{45} i^3$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 = \sum_{i=1}^{20} i^2$$

처음 200개의 양의 홀수의 합 *홀수는 (2i-1) or (2i+1) 로 표시함

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 399 = \sum_{i=1}^{200} (2i - 1) \quad or \quad \sum_{i=0}^{199} (2i + 1)$$

(정리 2.1) n이 양의정수 c는 상수일 때

(1) $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ (상수의 합)

(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (처음 n개의 양의 정수의 합)

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (처음 n개의 양의 정수 제곱의 합)

(4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (처음 n개의 양의 정수 세제곱의 합)

(5) $\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ (처음 n개의 양의 정수 다섯제곱의 합)

(정리 2.2) 상수 c, d에 대하여 $\sum_{i=1}^{n}(ca_i + db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i$

<예제>

$$(a)\ \sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2{,}870$$

$$(b)\ \sum_{i=1}^{800}(2i+1) = 2\frac{n(n+1)}{2} + 1(n) = 2\left[\frac{800 \times 801}{2}\right] + (1 \times 800) = 641{,}600$$

$$(c)\ \sum_{i=1}^{10}(i^3 - 3i + 1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3\frac{n(n+1)}{2} + 1(n) = \frac{(10^2) \times (11^2)}{4} - 3\left[\frac{10 \times 11}{2}\right] + 10 = 2{,}870$$

$$(d)\ \sum_{i=1}^{100}(i^5 - 2i^2) = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(100^2) \times (101^2) \times [2(100)^2 + 2(100) - 1]}{12} - 2\left[\frac{100 \times 101 \times 201}{6}\right] = 171{,}707{,}655{,}800$$

<예제> 함수 값의 합 계산

x=0.1, x=0.2, ⋯ x=1.0 에서 함수 f(x) = x^2+3의 값을 합하여라.

X값이 0.1의 배수로서 i=1, 2,⋯ 10 에 대하여 x를 0.1i (i=1,2,...,10)로 나타냄

$$\sum_{i=1}^{10} f(0.1i) = \sum_{i=1}^{10}[(0.1i)^2 + 3] = 0.1^2\sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{i=1}^{10} 3 = (0.1)^2\frac{(10)(11)(21)}{6} + (3)(10) = 33.85$$

<예제>

x=1.05, x=1.15, x=1.25, ⋯ x=2.95 에서 함수 f(x) = $3x^2$-4x+2의 값을 합하여라.

$* \; Two\ cases$: 1) $x_i = 1.05 + 0.1i \;\; (i = 0,1,\cdots,19)$ 혹은 2) $x_i = 0.95 + 0.1i \;\; (i = 1,2,\cdots,20)$

Case 2)를 사용하여 계산함

$$\sum_{i=1}^{20} f(0.95 + 0.1i) = \sum_{i=1}^{20}[3(0.95 + 0.1i)^2 - 4(0.95 + 0.1i) + 2] = \sum_{i=1}^{20}(0.03i^2 + 0.17i + 0.9075) = 139.95$$

<연습문제 4.2> 합의 공식을 이용하여 다음의 합을 구하여라

< 문제3 > $\sum_{i=6}^{10}(4i+2) = \sum_{i=1}^{10}(4i+2) - \sum_{i=1}^{5}(4i+2) = 4\sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 2 - 4\sum_{i=1}^{5} i - \sum_{i=1}^{5} 2$

$$= \frac{4\times 10\times 11}{2} + 2\times(10) - \frac{4\times 5\times 6}{2} - 2\times 5 = 220 + 20 - 60 - 10 = 170$$

< 문제7 > $\text{let n} = \text{i} - 3,\quad \text{when i} = 3 \rightarrow n = 0,\quad i = 30, n = 27$

$$\sum_{i=3}^{30}[(i-3)^2 + (i-3)] = \sum_{n=0}^{27} n^2 + \sum_{n=0}^{27} n = 0 + \sum_{n=1}^{27} n^2 + 0 + \sum_{n=1}^{27} n = \frac{27\times 28\times 55}{6} + \frac{27\times 28}{2} = 7{,}308$$

$$\sum_{i=1}^{30}[(i-3)^2 + (i-3)] - \sum_{i=1}^{2}[(i-3)^2 + (i-3)] = \sum_{i=1}^{30}[i^2 - 5i + 6] - \sum_{i=1}^{2}[l^2 - 5i + 6] = 7{,}308$$

< 문제8 > $\sum_{k=3}^{n}(k^2-3) = \sum_{k=1}^{n}(k^2-3) - \sum_{k=1}^{2}(k^2-3) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{2} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 3 + \sum_{k=1}^{2} 3$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2\times 3\times 5}{6} - 3n + 3\times 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5 - 3n + 6$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n + 1$$

<연습문제4.2> 다음의 주어진 값에서 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ 합을 구하라

$<$ 문제10 $>$ $f(x) = x^2 + 4x \quad x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$

$\Delta x = 0.2, \quad n = 5$

$x_i = 0.2i, \quad i = 1,2,..5$

$$\sum_{i=1}^{5}(x^2 + 4x)\Delta x \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}[(0.2i)^2 + 4(0.2i)](0.2)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{5} 0.04i^2 + \sum_{i=1}^{5} 0.8i\right)(0.2) = \left[0.04\frac{5\times 6\times 11}{6} + 0.8\frac{5\times 6}{2}\right](0.2) = (14.2)(0.2) = 2.84$$

$<$ 문제11 $>$ $f(x) = 4x^2 - 2 \quad x = 2.1, 2.2, \cdots, 3.0$

$\Delta x = 0,1, \quad n = 10$

$x_i = 2 + 0.1i, \quad i = 1,2,\cdots,10$

$$\sum_{i=1}^{10}(4x^2 - 2)\Delta x \Rightarrow \sum_{i=1}^{10}[4(2 + 0.1i)^2 - 2](0.1)$$

$$= \sum_{i=1}^{10}[4(4 + 0.01i^2 + 0.4i) - 2](0.1) = \left(0.04\sum_{i=1}^{10} i^2 + 1.6\sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 14\right)(0.1)$$

$$= \left[0.04\frac{10\times 11\times 21}{6} + 1.6\frac{10\times 11}{2} + (14)(10)\right](0.1) = 15.4 + 88 + 140 = 243.4$$

<문제 12> 합을 계산하고 n→∞ 일 때 극한 값을 구하라

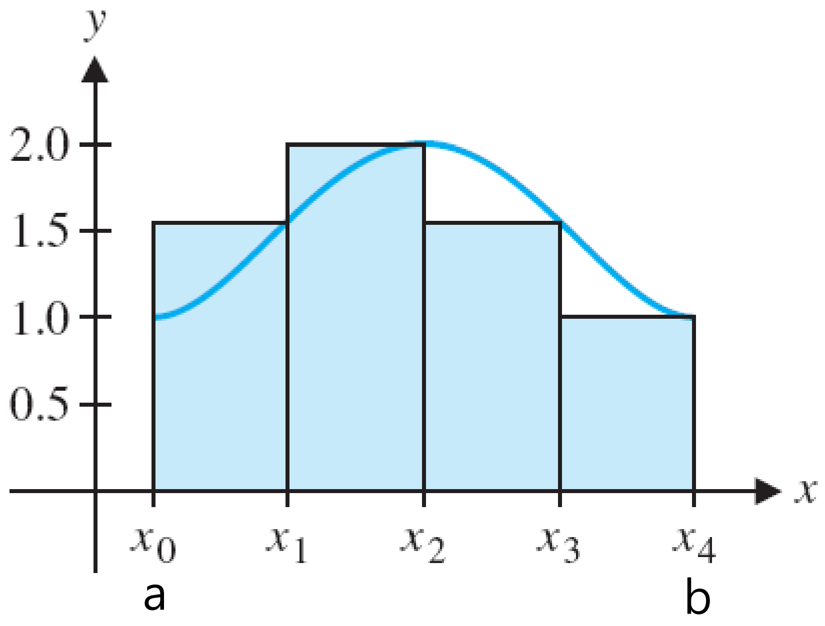
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[4\left(\frac{2i}{n}\right)^2-\left(\frac{2i}{n}\right)\right]=\frac{1}{n}\left[4\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right]=\frac{1}{n}\left[\frac{16}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)-\frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{16n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\frac{n(n+1)}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{16n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{32}{6}-1=\frac{16}{3}-1=\frac{13}{3}$$

- 4.3 넓이



y = f(x) 아래의 넓이

함수 f(x)≥0 가 폐구간 [a,b] 에서 연속일 때 구간 [a, b] 를 n개의 소구간으로 균등 분할한다. 이 때, 소구간의 폭을 $\frac{b-a}{n}$, 미소변화를 △x 로 표시한다.

즉, $\Delta\text{x} = \frac{b-a}{n}$ 이다.

이제 분할의 점들은 $x_0 = a,\ x_1 = x_0 + \Delta x,\ x_2 = x_1 + \Delta x,\ \cdots,$이고
이것을 일반화 하면 $x_i = x_0 + i\Delta x \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots, n)$ 가 된다.

이제, 넓이 근사값 $A_n = f(\text{x}_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x \cdots + f(x_n)\Delta x$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

<예제> 직사각형을 이용한 넓이의 근사값

(a) n=10개의 직사각형 (b) n=20개의 직사각형을 이용하여 구간 [0,1]에서 곡선 $f(x) = 2x - 2x^2$ 아래 넓이의 근사값을 구하라.

(a) $x_i = x_0 + i\Delta x \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 오른쪽 끝점 방법인 경우 $\Delta x = \frac{[b-a]}{n} = \frac{[1-0]}{10} = 0.1,\ x_0 = 0$

$$\therefore\ \mathrm{x_i} = \mathrm{i}\Delta x = i\frac{[b-a]}{n} = i\frac{1}{10} = 0.1i$$

$$A \approx A_{10} = \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{10}(2x_i - 2x_i^2)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{10}[2(0.1i) - 2(0.1i)^2](0.1) = \sum_{i=1}^{10}(0.2i - 0.02i^2)(0.1) = 0.02\sum_{i=1}^{10} i - 0.002\sum_{i=1}^{10} i^2$$

$$= (0.02)\frac{(10)(11)}{2} - (0.002)\frac{(10)(11)(21)}{6} = 0.33$$

(b) $\Delta x = \frac{1-0}{20} = \frac{1}{20} = 0.05$ $\quad\therefore\ \mathrm{x_i} = \mathrm{x_0} + \mathrm{i}\Delta x = 0.05\mathrm{i}$

$$A \approx A_{20} = \sum_{i=1}^{20} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{20}\left(2x_i - 2x_i^2\right)\Delta x = \sum_{i=1}^{20} 2[0.05i - (0.05i)^2](0.05)$$

$$= 0.01\sum_{i=1}^{20}(0.05i - 0.00025i^2) = (0.01)(0.05)\frac{(20)(21)}{2} - (0.01)(0.00025)\frac{(20)(21)(41)}{6} = 0.03325$$

(a little more accurate than with n=10)

(정의 3.1) 만약 f(x)≥0 가 구간 [a,b]에 연속일 때 구간 [a,b]에서 곡선 f(x) 아래의 넓이

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

<예제> 정확한 넓이의 계산 : n → ∞

구간 [0,1]에서 곡선 $y = f(x) = 2x - 2x^2$아래의 정확한 넓이를 구하라

오른쪽 끝점 방법의 경 $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ $\quad x_i = x_0 + i\Delta x = \frac{i}{n} \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[2\frac{i}{n} - 2\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}$$

$\therefore A_n$의 극한값 $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n^2}{3} = \frac{1}{3}$

<예제> (정리 2.1)의 공식이 적용 안되는 경우

구간 [1.3]에서 곡선 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 아래의 넓이 구하라

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$x_0 = 1$이므로

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 + \frac{2}{n}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\therefore \quad x_i = 1 + \frac{2}{n} i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i + 1}\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(1 + \frac{2i}{n}\right) + 1}\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2 + \frac{2i}{n}}$$

Stop Here!
CAS(Computer Algebra Systems) 혹은
프로그램이 가능한 계산기를 사용해야 한다.

(정리 3.2) 모든 i 에 대하여 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$이 $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$을 만족하는 구간 [a, b]의 균등 분할이다. 이 때 c_i는 i=1,2,…,n 에 대하여 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$안의 임의의 점 (계산점 : Evaluation Point) 이라고 할 때,

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x$$ 를 리만합 (Riemann Sum)이라 한다.

따라서 곡선 y=f(x) 아래의 넓이는 리만합의 극한이다.

$$\text{즉}\quad A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

계산점 C_i 에 대한 3가지 선택 (그림 4.11a,b,c)

여기에서 (1) $C_i = x_i$ 오른쪽 끝점 (Overestimated)

(2) $C_i = x_{i-1}$ 왼쪽 끝점 (Underestimated)

(3) $C_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ 중점 (Most Accurate)

<연습문제 4.3>

<문제 3> 각 구간에서 (a) 왼쪽 끝점 (b) 중점 (c) 오른쪽 끝점을 계산점으로 하여 다음 곡선 아래의 넓이의 근사값을 구하라

$$y = x^2 + 1, \qquad [0,1], \qquad n = 16 \qquad \Delta x = \frac{1}{16}$$

(a) 왼쪽 끝점

$$C_i = i\Delta x = \frac{i}{16}, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, 15$$

$$A_{16} = \sum_{i=0}^{15} f(c_i)\Delta x = \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{15}\left[\left(\frac{i}{16}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{16}\left\{\sum_{i=0}^{1}\left[\left(\frac{i}{16}\right)^2 + 1\right] + \sum_{i=1}^{15}\left[\left(\frac{i}{16}\right)^2 + 1\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{16}\left\{\left[\left(\frac{o}{16}\right)^2 + 1\right] + \sum_{i=1}^{15}\left[\left(\frac{i^2}{256}\right) + 1\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{16}\left\{1 + \frac{1}{256}\left(\frac{(15)(16)(31)}{6}\right) + 1 \times 15\right\} = \frac{1}{16}[1 + 4.8438 + 15] \cong 1.3027$$

Underestimated

(b) 중점

$$C_i = i\Delta x + \frac{\Delta x}{2} = \frac{i}{16} + \frac{1}{32}, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, 15$$

$$A_{16} = \sum_{i=0}^{15} f(c_i)\Delta x = \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{15}\left[\left(\frac{i}{16} + \frac{1}{32}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{16}\left\{\sum_{i=0}^{1}\left[\left(\frac{i}{16} + \frac{1}{32}\right)^2 + 1\right] + \sum_{i=1}^{15}\left[\left(\frac{i}{16} + \frac{1}{32}\right)^2 + 1\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{16}\left\{\left(\frac{1}{32^2} + 1\right) + \sum_{i=1}^{15}\left(\frac{i^2}{256} + \frac{i}{256} + \frac{1}{1024}\right) + 1 \times 15\right\} \cong 1.333$$

Most Accurate

(c) 오른쪽 끝점

$$C_i = i\Delta x + \Delta x = \frac{i}{16} + \frac{1}{16}, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, 15$$

$$A_{16} = \sum_{i=0}^{15} f(c_i)\,\Delta x = \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{15}\left[\left(\frac{i}{16} + \frac{1}{16}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{16}\left\{\sum_{i=0}^{1}\left[\left(\frac{i}{16} + \frac{1}{16}\right)^2 + 1\right] + \sum_{i=1}^{15}\left[\left(\frac{i}{16} + \frac{1}{16}\right)^2 + 1\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{16}\left\{\left(\frac{1}{16^2} + 1\right) + \sum_{i=1}^{15}\left(\frac{i^2}{256} + \frac{i}{128} + \frac{1}{256}\right) + 1 \times 15\right\} \cong 1.3652$$

Overestimated

<문제 6> 리만합과 극한을 사용하여 주어진 구간에서 곡선 아래의 넓이를 구하라.

$y = 2x^2 + 1$

주어진 구간 [a,b]를 n개의 같은 소구간으로 균등하게 나눈다.
이때 소구간의 폭은 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = x_0 + (\Delta x)i = a + \frac{b-a}{n} i$

리만합의 극한이 곡선 아래 넓이 $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

(a) $[0, 1]$ $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

오른쪽 끝점을 계산점으로 한다.

$$x_i = x_0 + (\Delta x)i = x_0 + \frac{i}{n} = 0 + \frac{i}{n} = \frac{i}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[2\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right]\frac{1}{n} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{\mathrm{n}}(\mathrm{n}) = \frac{2}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] + 1$$

$$= \frac{5n^2 + n + 1}{3n^2}$$

$$\therefore A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + n + 1}{3n^2} = \frac{5}{3}$$

$(b)\ [-1,1]$

$$\Delta x = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{\text{n}}\ , \qquad x_i = x_0 + (\Delta x)i = -1 + \frac{2i}{n}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[2\left(-1+\frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right]\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(3 - \frac{8i}{n} + \frac{8i^2}{n^2}\right) = 6 - \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= 6 - \frac{16}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{16}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = 6 - \left(\frac{8n+8}{n}\right) + \left(\frac{16n^2+24n+8}{3n^2}\right)$$

$$\therefore A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(6 - \frac{8n+8}{n} + \frac{16n^2+24n+8}{3n^2}\right)$$

$$= 6 - 8 + \frac{16}{3} = \frac{10}{3}$$

(c) [1,3]

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \qquad x_i = x_0 + (\Delta x)i = 1 + \frac{2i}{n}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[2\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right]\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i^2}{n^2} + \frac{8i}{n} + 3\right) = \frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + 6$$

$$= \frac{16}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{16}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 6 = \frac{16n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{16n(n+1)}{2n^2} + 6$$

$$\therefore A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{16n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{16n(n+1)}{2n^2} + 6\right) = \frac{32}{6} + \frac{16}{2} + 6 = \frac{58}{3}$$

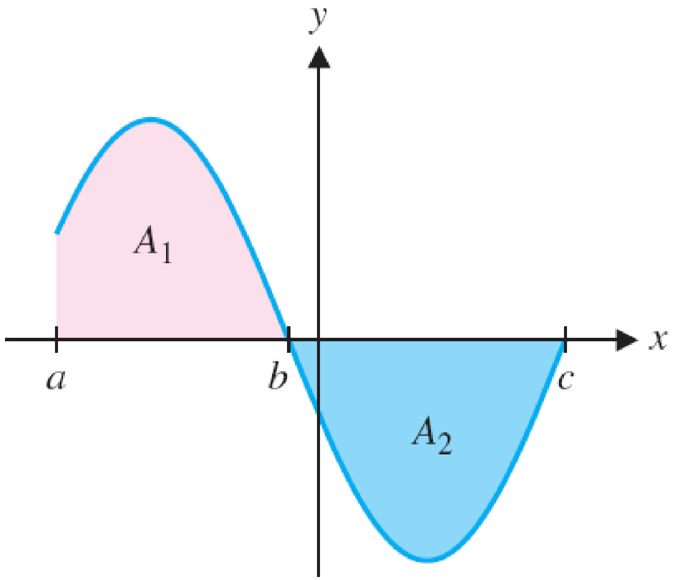
- 4.4 정적분 (Definite Integral)

<정의 4.1> 구간 [a,b]에서 정의된 함수 f(x)에 대하여 a (적분의 하한)로부터 b (적분의 상한) 까지 f(x)의 정적분은

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

이다. 이처럼 극한이 존재할 때 f(x)는 구간 [a,b]에서 적분가능 (Integrable) 하다고 한다. 이 때 c_1, c_2,……,c_n을 어떻게 선택하여도 극한 값은 같아야 한다

- 유향넓이(Signed Area)



유향넓이 : 함수 f(x)와 x축 위와 아래에 놓여있는 넓이의 차이 $A_1 + A_2$

전체넓이 : 함수 f(x)와 x축으로 둘러싸인 넓이 전체의 합 $|A_1| + |A_2|$

- (Example) 어떤 물체의 속도가 v(t)이고 위치가 s(t) 일 때 속도의 방향에 따라 최종 위치는 양 혹은 음이 될 수 있다.

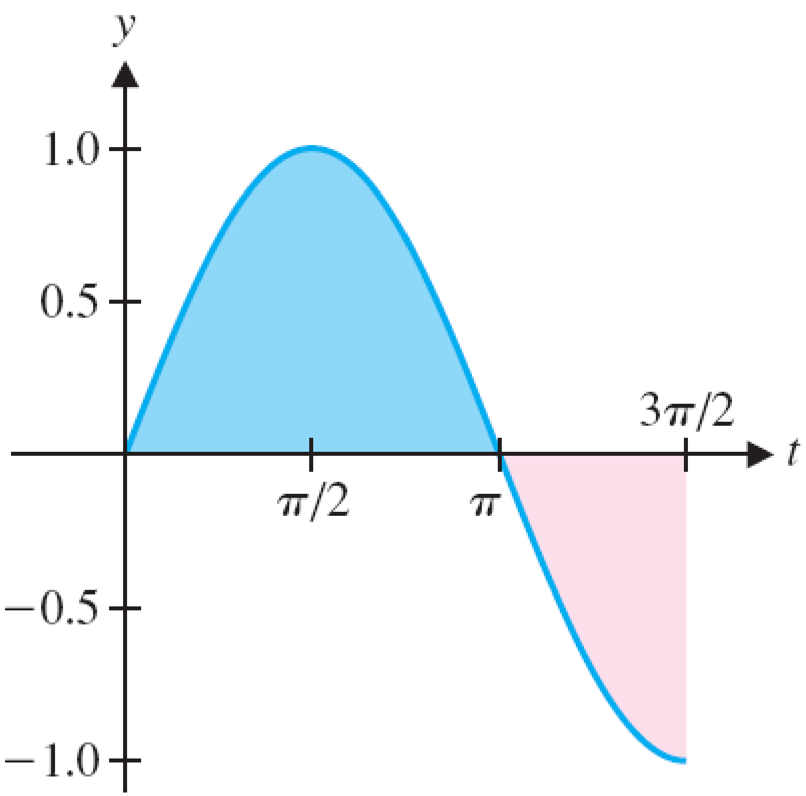
* 물체의 최종 위치는 $\int_{t_1}^{t_2} v_1(t)\,dt + \int_{t_2}^{t_3} v_2(t)\,dt$

즉, 물체의 출발부터 도착까지의 위치의 전체 변화이다.

* 물체의 전체 이동거리는 $\left|\int_{t_1}^{t_2} v_1(t)\,dt\right| + \left|\int_{t_2}^{t_3} v_2(t)\,dt\right|$

<예제> 물체 위치 변화의 계산

물체의 속도 함수가 v(t)=sint 일 때 물체가 t=0에서 t=3π/2까지 움직일 때 전체이동거리와 물체의 위치를 구하라.



전체 이동거리

$$A = \left|\int_0^{\pi} sint\, dt\right| + \left|\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} sint\ \ dt\right|$$

$$= 2.0 + 1.0 = 3.0$$

물체의 최종위치

$$A = \int_0^{\pi} sint\, dt + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} sint\ \ dt$$

$$= 2.0 - 1.0 = 1.0$$

(정리 4.2)

$$\int_a^b [c\, f(x) + d\, g(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\, dx\,, \qquad a \le x \le b$$

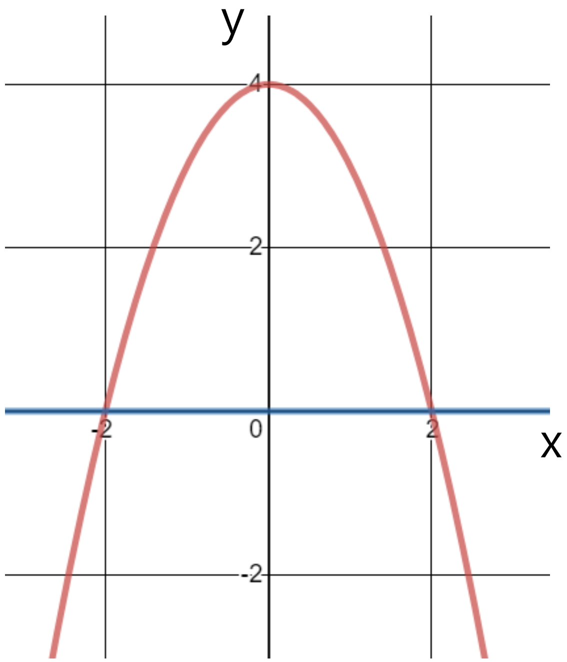
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

<연습문제 4.4 >

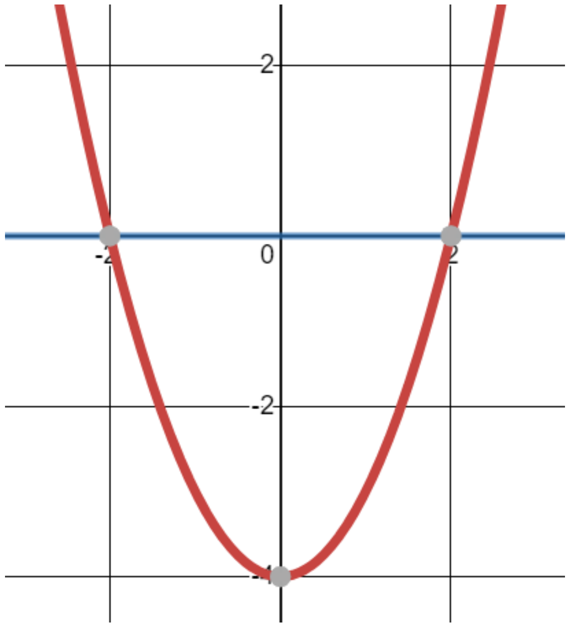
- 다음의 전체 넓이를 적분 (또는 적분의 합) 으로 나타내어라

<문제 5> $y = 4 - x^2$과 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이



$$\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \frac{32}{3}$$

<문제 6 > $y = x^2 - 4$ 와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이



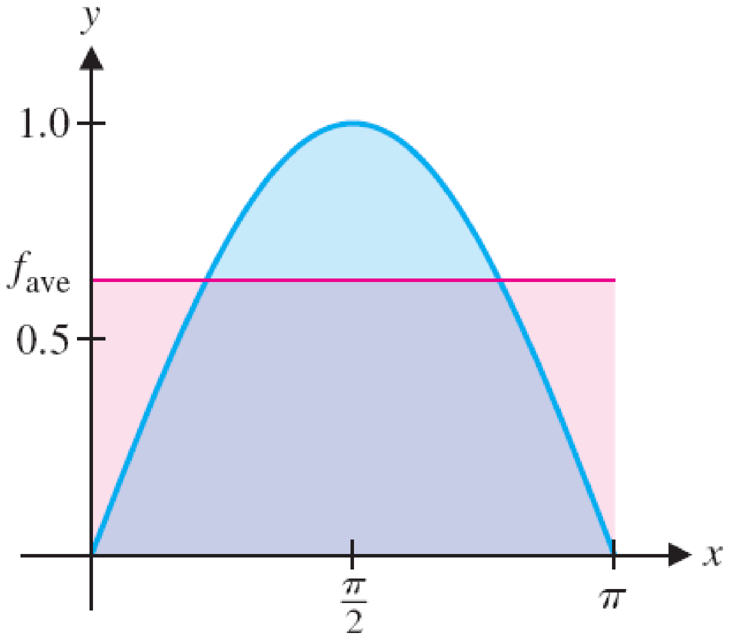
$$-\int_{-2}^{2}(x^2 - 4)dx = \frac{32}{3}$$

- **함수의 평균값 (Average value of a function)**

구간 [a,b] 에서 함수 f(x)의 평균값은 다음과 같다

$$f_{ave} = \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

<예제> 구간 [0,π]에서 f(x)=sinx의 평균값을 구하라

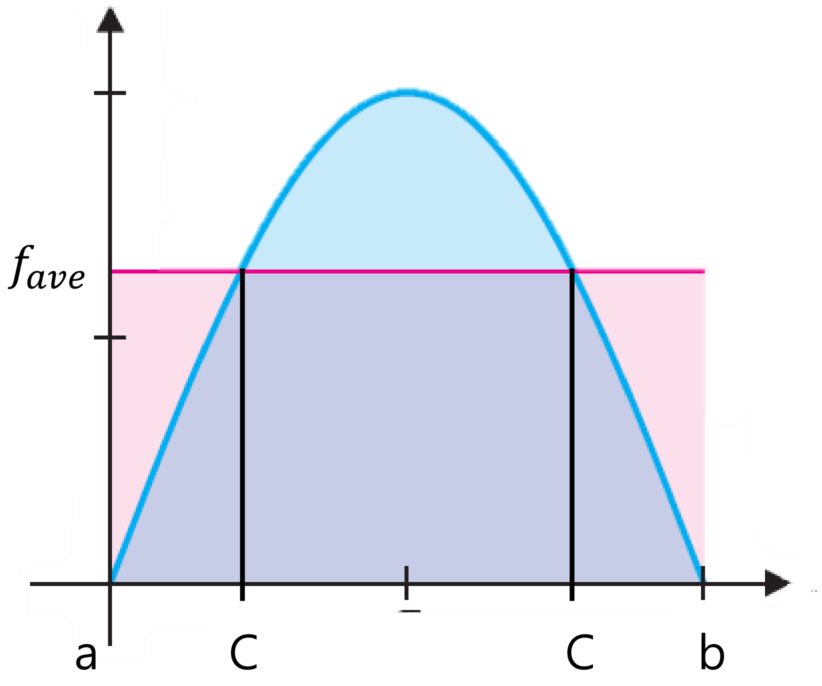


$$f_{ave} = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} sinx\,dx = -\frac{1}{\pi}[\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}[cos\pi - cos0] = -\frac{1}{\pi}[-1-1] = \frac{2}{\pi}$$

- 적분의 평균값 정리 (Integral Mean Value Theorem)

(정리 4.4) 만약 [a, b]에서 f(x)가 연속이면 $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ 인 적당한 수 c∈(a, b)가 존재한다.



$$f_{ave}(a-b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

<문제 11> 주어진 구간에서 함수의 평균값을 구하라

$$f(x) = x^2 - 1, \qquad [1,3]$$

$$f_{ave} = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^2 - 1)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 = \frac{10}{3}$$

Alternative Method:

$\Delta x = \frac{2}{n} \qquad x_i = x_0 + i\,\Delta x = 1 + \frac{2i}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3-1}\left[\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n(n+1)}{2n^2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right) = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

<문제 14> 적분의 평균값 정리를 만족하는 점 c를 구하라

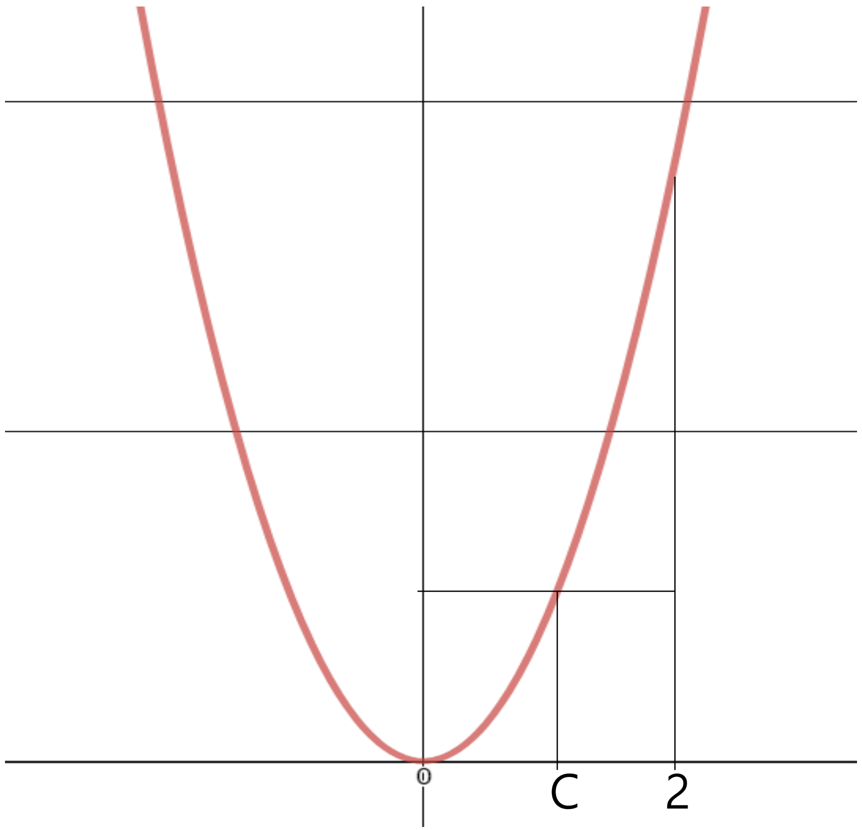
$\int_0^2 3x^2\,dx (= 8)$ 를 평균값 정리를 사용하도록 바꾼다.

$f(c) = \frac{1}{2}\int_0^2 3x^2\,dx = 4$가 되고 이를 만족하는 c값을 구한다

여기에서 $f(x) = 3x^2$ 이므로

$3c^2 = 4$이며, 이것을 풀면 $c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

이제 [0, 2]사이에 있는 값은 $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 이다



- 4.5 미적분학의 기본정리

(정리 5.1) 만약 [a, b] 에서 f(x)가 연속이고 F(x)가 f(x)의 역도함수이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$$

OR $$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

<예제>

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\int_1^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{x^2})dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-2}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{-1}\right]_1^4 = \frac{47}{12}$$

<예제>

구간 [0,π]에서 함수 f(x)=sinx 아래의 넓이 구하라

$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -[\cos\pi - \cos 0] = -[-1-1] = 2$$

지수함수

$$\int_0^4 e^{-2x}\, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^4 = -\frac{1}{2}[e^{-8} - e^0] \cong 0.49983$$

로그함수

$$\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x} dx = [2\ln|x|]_{-3}^{-1} = 2[\ln|-1| - \ln|-3|] = -2\ln 3$$

상한이 변수

$$\int_1^x 12t^5\, dt = 12\left[\frac{t^6}{6}\right]_1^x = 2[x^6 - 1]$$

(정리 5.2) 만약 [a,b] 에서 f(x)가 연속이고 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 이면 $F'(x) = f(x)$ 이 된다.

<예제>

$F(x) = \int_1^x (t^2 - 2t + 3)\,dt$ 일 때 $F'(x) = f(x) = x^2 - 2x + 3$ 이다.

- 변수 형태의 상한이 Polynomial을 포함할 때 연쇄법칙과 (정리 5.2) 이용

$F(x) = \int_2^{x^2} \cos t\,dt$ 에서 F′(x)를 구하라 $F'(x) = \cos u(x)\dfrac{du}{dx} = \cos u(x)(2x) = 2x\cos x^2.$

-변수 형태의 상한과 하한을 포함함

$$F(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2+1}\,dt = \int_{2x}^{0} \sqrt{t^2+1}\,dt + \int_{0}^{x^2} \sqrt{t^2+1}\,dt = -\int_{0}^{2x} \sqrt{t^2+1}\,dt + \int_{0}^{x^2} \sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$F'(x) = -\sqrt{(2x)^2+1}\,\frac{d}{dx}(2x) + \sqrt{(x^2)^2+1}\,\frac{d}{dx}(x^2) = -2\sqrt{4x^2+1} + 2x\sqrt{x^4+1}.$$

<예제> 물체의 낙하거리에 관한 계산

Sky Diver의 하강속도가 처음 5초 동안 $v(t) = 30(1 - e^{-t})\ ft/s$ 로 주어질 때
Sky Diver의 낙하거리를 구하라.

$$D = \int_0^t v(t)\,dt$$

$$Distance = \int_0^5 (30 - 30e^{-t})\,dt = [30t + 30e^{-t}]_0^5$$

$$= (150 + 30e^{-5}) - (0 + 30e^{0})$$

$$= 120 + 30e^{-5} \approx 120.2ft$$

<예제> 탱크 속의 물의 부피의 변화율과 전체변화

물이 저장 탱크의 안팎으로 흐른다. 물의 순 변화율 (증가율 – 감소율) 은 $f(t) = 20(t^2 - 1)$ GPM (gallon/min) 이다. (1 gallon=3.785 liter)

(a) 0≤t≤3 에서 물의 높이가 증가할 때와 감소할 때를 결정하여라

- 여기에서 w(t)를 시간 t일 때 물의 양(gallon)이라고 하면, 시간에 대한 물의 순변화율은 f(t)=w′(t)이다

0≤t<1 일 때 $f(t) = 20(t^2 - 1) < 0$, 따라서 물의 높이가 감소함

1<t≤3 일 때 $f(t) = 20(t^2 - 1) > 0$, 따라서 물의 높이가 증가함

(b) 만약 t=0일 때 탱크에 200gallon의 물이 있다면, t=3일 때 탱크에 남아있는 물의 양을 구하라

$w(0) = 200$ 이므로 t=3 일 때 탱크에 남아있는 물의 양

$$w(t) = \int_0^3 w'(t)\,dt = \int_0^3 20(t^2 - 1)\,dt, \quad w(3) - w(0) = 20\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^3 = 120 \qquad \therefore w(3) = w(0) + 120 = 320$$

또는 $w(t) = \int w'(t)\,dt = \int 20(t^2 - 1)\,dt = 20\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C \qquad w(0) = c = 200 \qquad \therefore w(t) = 20\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + 200$

<예제> 함수 $F(x) = \int_4^{x^2} \ln(t^3+4)\,dt$ 에 대하여 x=2에서 접선방정식을 구하라

$F'(x) = \ln\left((x^2)^3+4\right)(2x) = 2x\ln(x^6+4)$

기울기 m이고 접선(x_0, y_0)를 지나는 방정식
$y = m(x - x_0) + y_0$

$\therefore F'(2) = (2)(2)\ln(2^6+4) \cong 16.878$

$F(2) = \int_4^4 \ln(t^3+4)\,dt = 0$

$\therefore y = 16.878(x-2)$

<연습문제 4.5> 미적분학의 정리

<문제 11> 도함수 f′(x)를 구하라

$$f(x) = \int_0^{x^2} (e^{-t^2} + 1)\,dt \qquad f'(x) = \left(e^{-(x^2)^2} + 1\right)\frac{d}{dx}(x^2) = 2x(e^{-x^4} + 1)$$

<문제 13> 위치함수 s(t)를 구하라

$$a(t) = 4 - t, \qquad v(0) = 8, \qquad s(0) = 0$$

속도함수 $v(t) = \int a(t)\,dt = \int (4 - t)\,dt = 4x - \frac{t^2}{2} + c_1 \qquad v(0) = 8 \quad \rightarrow c_1 = 8$

$$v(t) = 4t - \frac{t^2}{2} + 8$$

위치함수 $s(t) = \int v(t)\,dt = \int (4t - \frac{t^2}{2} + 8)\,dt = 2t^2 - \frac{t^3}{6} + 8t + c_2 \qquad s(0) = 0 \quad \rightarrow c_2 = 0$

$$s(t) = 2t^2 - \frac{t^3}{6} + 8t$$

<문제 15> 주어진 점에서 접선방정식을 구하라

$y(x) = \int_2^x \cos(\pi t^3)\,dt, \qquad x = 2 \qquad\qquad y'(x) = \frac{d}{dx}\int_2^x \cos(\pi t^3)\,dt = \cos(\pi x^3)$

점 x=2에서 기울기는 $y'(2) = \cos(8\pi) = 1$

x=2에 대응하는 y점 $y(2) = \int_2^2 \cos(\pi t^3)\,dt = 0$

기울기가 1이고 점 (2,0)을 지나는 방적식 $y - 0 = 1(x-2) \qquad \therefore y = x - 2$

<문제 17> 주어진 구간에서 다음 함수의 평균값을 구하라

$f(x) = cosx, \qquad [o, \frac{\pi}{2}]$

$$f_{ave} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx = \frac{2}{\pi}[sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right] = \frac{2}{\pi}$$

<Extra Problem> 다음 함수의 도함수 f′(x)를 구하라

$$f(x) = \int_{3x}^{sinx} (t^2 + 4)\,dt = \int_{3x}^{0} (t^2 + 4)\,dt + \int_{0}^{sinx} (t^2 + 4)\,dt$$

$$= -\int_{0}^{3x} (t^2 + 4)\,dt + \int_{0}^{sinx} (t^2 + 4)\,dt$$

$$f'(x) = -[(3x)^2 + 4]\frac{d}{dx}(3x) + [(sinx)^2 + 4]\frac{d}{dx}sinx$$

$$= -(9x^2 + 4)(3) + (\sin^2 x + 4)cosx$$

$$= -27x^2 - 12 + \sin^2 x\,cosx + 4cosx$$

- 4.6 치환적분

치환하려는 함수(치환함수)의 도함수가 피적분함수의 일부인 경우 성립한다.

<예제> 자연지수의 거듭제곱 함수

$$\int 2xe^{x^2}\,dx \qquad \text{let} \quad x^2 = u \text{ 그리고 양변을 미분}, 2xdx = du$$

$$\Rightarrow \int e^u\,du = e^u + c = e^{x^2} + c$$

<예제> 거듭제곱 안의 Polynomial 함수

$$\int (x^3+5)^{100}\,(3x^2)dx \qquad x^3 + 5 = u\,, \qquad 3x^2dx = du$$

$$\Rightarrow \int u^{100}\,du = \frac{u^{101}}{101} + c = \frac{(x^3+5)^{101}}{101} + c$$

<예제> 코사인 안의 거듭제곱 함수

$$\int xcosx^2dx \qquad x^2 = u \qquad 2xdx = du$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2}cosu\,du = \frac{1}{2}sinu + c = \frac{1}{2}sinx^2 + c$$

<예제> 거듭제곱 안의 삼각함수

$$\int (3tanx + 4)^5 \sec^2 x\,dx \qquad 3tanx + 4 = u \qquad 3\sec^2 x\,dx = du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int u^5\,du = \frac{1}{3}\,\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18}(3tanx + 4)^6 + c$$

<예제> 사인 안의 제곱근 함수

$$\int \frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \qquad \sqrt{x} = u, \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}} = du$$

$$\Rightarrow 2\int sinu\,du = -2cosu + c = -2\cos\sqrt{x} + c$$

<예제> 분자가 분모의 도함수

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}dx \qquad x^3+5=u, \qquad 3x^2dx=du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln|u|+c = \frac{1}{3}\ln|x^3+5|+c$$

<예제> 탄젠트 함수의 역도함수(적분) 구함

$$\int tanx\,dx = \int \frac{sinx}{cosx}dx \qquad cosx=u, \qquad -sinxdx=du$$

$$\Rightarrow -\int \frac{du}{u} = -\ln|u|+c = -\ln|cosx|+c$$

<예제> 역탄젠트 함수의 거듭제곱 함수

참고: $\boldsymbol{\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + c}$

$$\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx \qquad \tan^{-1}x=u \qquad \frac{1}{1+x^2}dx=du$$

$$\Rightarrow \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3+c = \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3+c$$

<예제> 피적분 함수를 전개하기 위한 치환 (치환함수의 도함수가 피적분함수의 일부가 아니다)

(피적분 함수에 합 또는 차의 제곱근이 존재함)

$$\int x\sqrt{2-x}\,dx \qquad u = 2 - x \quad du = -dx \quad x = 2 - u$$

$$\Rightarrow -\int (2-u)\sqrt{u}du = -2\int \sqrt{u}\,du + \int u\sqrt{u}du$$

$$= -2\int u^{\frac{1}{2}}\,du + \int u^{\frac{3}{2}}\,du = -\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= -\frac{4}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} + c$$

- 정적분의 치환 (치환에 의하여 변수가 바뀔 때 적분한계도 함께 치환 해야함)

<예제>

$$\int_1^2 x^3\sqrt{x^4+5}\,dx \qquad x^4+5=u \quad 4x^3dx=du \qquad \begin{aligned} x=1 &\rightarrow u=6 \\ x=2 &\rightarrow u=21 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_6^{21} \frac{1}{4}\sqrt{u}\,du$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}}\Big|_6^{21} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(21^{\frac{3}{2}}-6^{\frac{3}{2}})$$

<예제> 자연지수의 거듭제곱 함수

$$\int_0^{15} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad -\frac{t^2}{2}=u \quad -tdt=du \qquad \begin{aligned} t=0 &\rightarrow u=0 \\ t=15 &\rightarrow u=-\frac{225}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\int_0^{-\frac{225}{2}} e^u\,du = -e^u\Big|_0^{-\frac{225}{2}} = -e^{-\frac{225}{2}}+1$$

<연습문제 4.6> 치환적분 : 치환함수의 도함수가 피적분 함수의 일부

<문제 5> 다음 적분을 구하라

$\int xe^{x^2+1}\,dx$ $\qquad u = x^2 + 1 \to du = 2xdx \to \frac{1}{2}du = xdx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + c$

<Extra Problem>

$\int \sin^3 x\,cosx\,dx$ $\qquad u = sinx \to du = cosxdx$

$\Rightarrow \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$

<문제 7>

$\int \frac{4}{x(\ln x + 1)^2}dx$ $\qquad u = \ln x + 1 \to du = \frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow 4\int \frac{1}{u^2}du = 4\int u^{-2}\,du = 4\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right] + c = -4u^{-1} + c = -4(\ln x + 1)^{-1} + c$

<문제 8>

$$\int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad u = \sin^{-1} x \to du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\Rightarrow \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\sin^{-1} x)^4}{4} + c$$

<문제 9>

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx \qquad u = x^2 \quad \to \quad du = 2xdx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1} u + c = \frac{1}{2}\sin^{-1} x^2 + c$$

참고 :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = sec^{-1} x + c$$

<문제 10>

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \tan^{-1} x + c_1 + \int \frac{x}{1+x^2}dx \qquad u = 1+x^2 \quad \to \quad du = 2xdx$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} x + c_1 + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \tan^{-1} x + c_1 + \frac{1}{2}\ln|u| + c_2 = \tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

<문제 12>

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \Rightarrow \int_0^2 \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx$$

$u = e^x \qquad du = e^x dx$

$u(0) = e^0 = 1 \qquad u(2) = e^2$

$$\Rightarrow \int_1^{e^2} \frac{du}{1+u^2} = [\tan^{-1} u]_1^{e^2} = \tan^{-1} e^2 - \tan^{-1} 1 = 82.29° - 45° = 37.29° = 0.651$$

참고: (π/180)x37.29 = 0.651

<문제 13>

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cotx\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sinx} dx$$

$u = sinx \qquad du = cosxdx$

$u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \ln|1| - \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = 0 + \ln\sqrt{2} = 0.3466$$

<문제 16> 주어진 치환을 사용하여 다음 적분을 변형하여라

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\, f(sinx)dx \Rightarrow \int_0^1 f(u)\, du$$

$u(0) = 0$

$u = sinx \qquad du = cosxdx \qquad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

<문제 18>

(a) $I = \int_0^{10} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx$ 에서 적당히 치환하여 $I = \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx$ 임을 보여라

$u = 10 - x \quad du = -dx \qquad u(0) = 10$

$u(10) = 0$

$$\therefore I = \int_0^{10} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx = -\int_{10}^{0} \frac{\sqrt{10-u}}{\sqrt{10-u}+\sqrt{u}}\,du = \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-u}}{\sqrt{10-u}+\sqrt{u}}\,du$$

Since u and x are dummy variables, u can be replaced by x like the below

$$\Rightarrow I = \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{10-x}+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{10-x}+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{10} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\right)dx$$

$$= \int_0^{10} 1\,dx - \int_0^{10} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx = 10 - I \qquad \therefore 2I = 10 \quad \rightarrow \quad I = 5$$

(b) 앞의 결과를 f(x)가 양수이고 연속함수 일 때 $I=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$ 에 대하여 일반화하여라

그리고 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{sinx+cosx}dx$ 를 구하라

$$u=a-x \rightarrow du=-dx \qquad u(0)=a, u(a)=0$$

$$I=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=-\int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}du=\int_0^a \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}du$$

$Replace\ u\ by\ x$ $\quad I=\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)}dx=\int_0^a \frac{f(a-x)+f(x)-f(x)}{f(a-x)+f(x)}dx=\int_0^a 1\,dx-\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$

$$=a-I \qquad \therefore 2I=a \rightarrow I=\frac{a}{2}$$

$Thus,$ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{sinx+cosx}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{sinx+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

4가지 삼각함수 정의 $tanx = \frac{sinx}{cosx}$, $cotx = \frac{cosx}{sinx}$, $secx = \frac{1}{cosx}$, $cscx = \frac{1}{sinx}$

임의의 실수 α,β에 대하여 다음의 항등식이 성립한다.

$\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha$ $\cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - cos2\alpha)$ $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + cos2\alpha)$ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$ $cos2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cosx$ (그래프를 좌측으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동)

$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -cosx$ (그래프를 우측으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동)

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -sinx$ (그래프를 좌측으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동)

$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sinx$ (그래프를 우측으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동)

$\sin(x + 2\pi) = sinx$ $\cos(x + 2\pi) = cosx$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -(-cosx) = cosx$

- 4.7 정적분의 근사값 (Numerical Integration)

Reminder: 정적분의 근사값은 임의의 리만합　　　　정적분의 정확한 값은 리만합의 극한

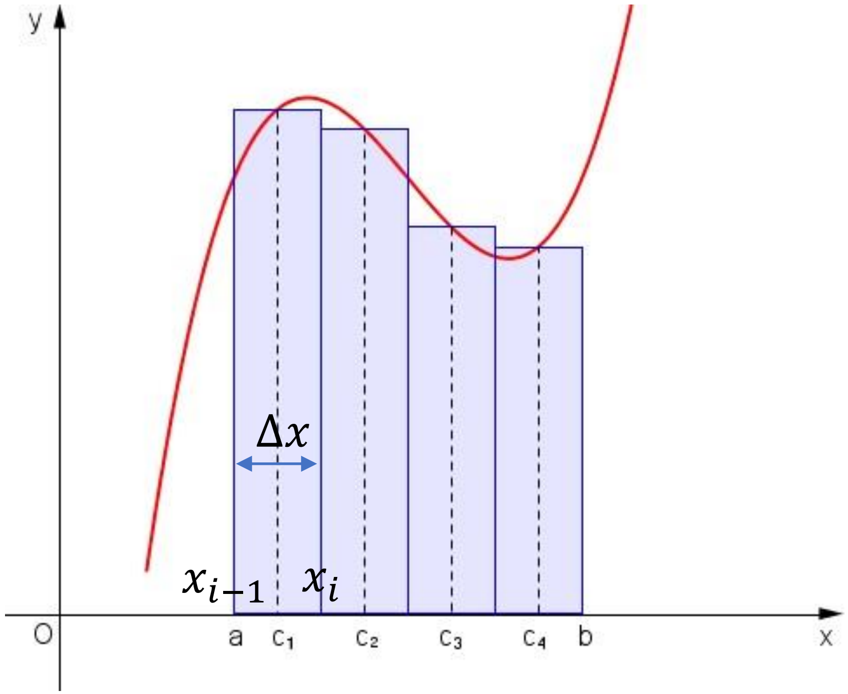
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \qquad\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

(a) 중점법칙 (Midpoint Rule) $[f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)]\Delta x = \dfrac{b-a}{n}[f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)]$

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\,\frac{b-a}{n}$$

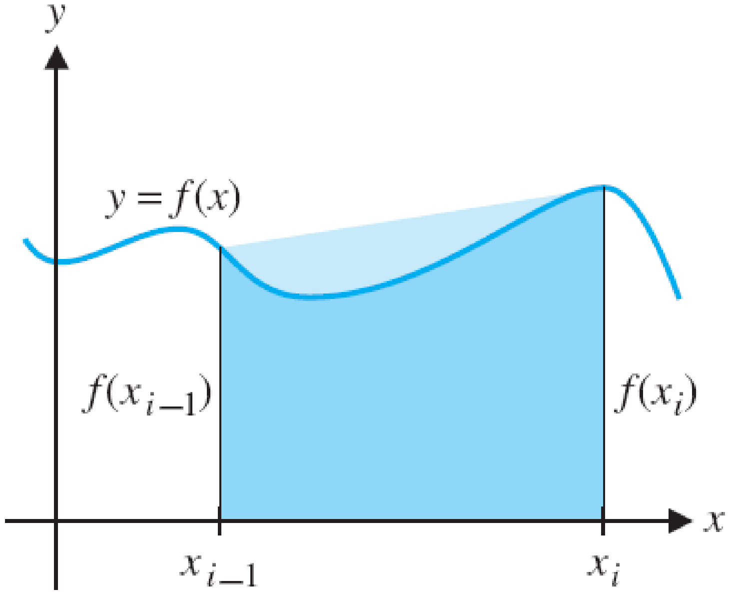
$$= \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{1}{2}(x_0+x_1)\right) + f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)\right)\right]$$



(b) 사다리꼴 법칙 (Trapezoidal Rule)

소구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 곡선 아래의 근사 넓이는

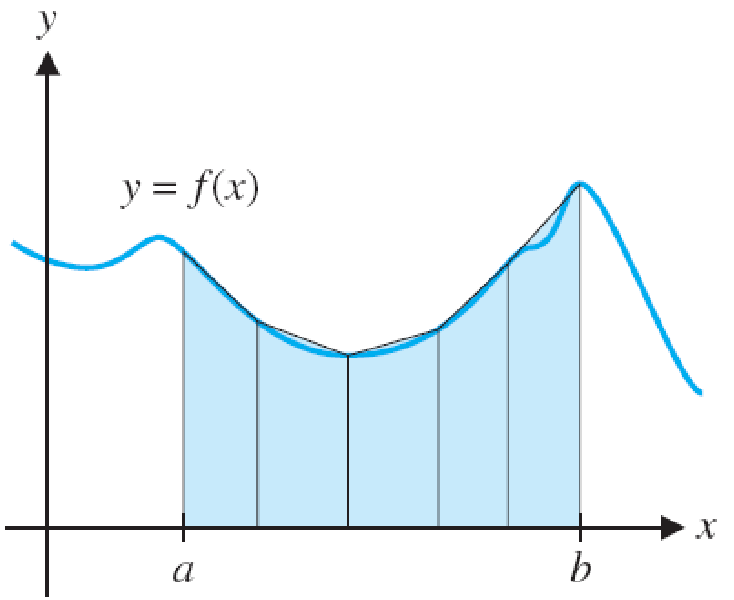
$$A_i \cong \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\Delta x$$



i=1, 2, ⋯, n 대하여 각 소구간에서 곡선 아래 넓이의 근사값을 더하면

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]\Delta x$$

$$= \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$



(c) 심프슨 공식 (Simpson's Rule)

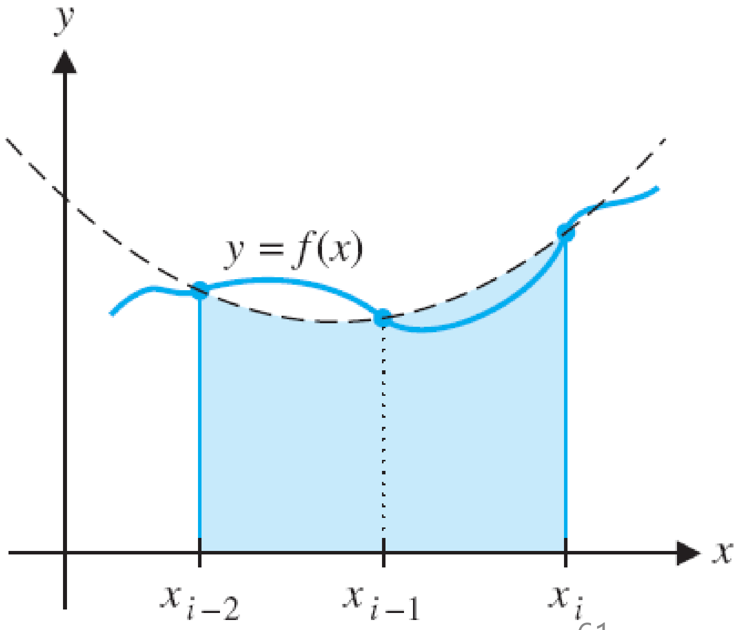
$f(x) = ax^2 + bx + c$(포물선)이 세점 $[(x_{i-2}, f(x_{i-2})], [(x_{i-1}, f(x_{i-1})]$, $[(x_i, f(x_i)]$를 지나므로 적분한 값에 대입하여 a, b, c를 구한다.

소구간 $[x_{i-2}, x_i]$에서 f(x) 곡선 아래의 근사넓이는

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{x_i - x_{i-2}}{6}[f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{b-a}{3n}[f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

i=2, 4, ⋯, n에 대하여 각 소구간에서 곡선 아래 넓이의 근사값을 더하면

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\begin{bmatrix} f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \\ \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \end{bmatrix}$$



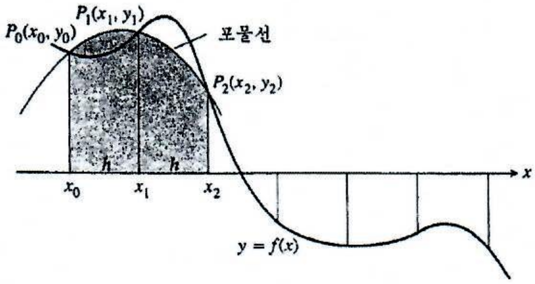


그림 4.38 심프슨 공식은 가장 짧은 포물선으로 곡선을 대신한다.

A_p를 유도하는 식은 다음과 같다. 계산을 간단히 하기 위하여 그림 4.39과 같은 좌표계를 사용하자. 포물선 아래의 면적은 y-축이 어디에 있든, 이 도형의 넓이는 변하지 않는다. 포물선은

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

인 형태의 방정식이므로 $x = -h$부터 $x = h$까지 곡선 아래의 면적은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_p &= \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} \\ &= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C). \end{aligned} \tag{6}$$

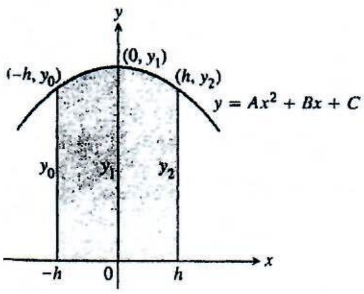


그림 4.39

$$A_p = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

포물선은 세 점 $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2)을 지나므로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \qquad y_1 = C, \qquad y_2 = Ah^2 + Bh + C,$$

위 식으로 부터

$$\begin{aligned} C &= y_1, \\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1, \\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1, \\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1 \end{aligned} \tag{7}$$

임을 알 수 있다. 면적 A_p을 y_0, y_1와 y_2의 항으로 표현하면

$$A_p = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}((y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{8}$$

을 얻을 수 있다.

<예제> n=4일 때 중점법칙을 이용하여 $\int_0^1 3x^2\,dx$ 의 근사값을 구하라

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} \qquad x_i = x_0 + i\Delta x = \frac{1}{4}i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{4}, \quad x_4 = 1$$

중점 $c_1 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) = \frac{1}{8}, \quad c_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{3}{8}, \quad c_3 = \frac{5}{8}, \quad c_4 = \frac{7}{8}$

$$\int_0^1 3x^2\,dx \cong \frac{b-a}{n}[f\left(\frac{1}{2}(x_0 + x_1)\right) + f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) + f\left(\frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right) + f\left(\frac{1}{2}(x_3 + x_4)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{64} + \frac{27}{64} + \frac{75}{64} + \frac{147}{64}\right)$$

$$= \frac{252}{256} = 0.9843 \text{ (Underestimated)}$$

<예제> n=4일 때 사다리꼴 공식을 이용하여 $\int_0^1 3x^2\,dx$ 의 근사값을 구하라

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{4}, \quad x_4 = 1$$

$$\int_0^1 3x^2\,dx \cong \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)] = \frac{1}{8}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{27}{8} + 3\right) = \frac{66}{64} = \frac{33}{32} = 1.0313 \text{ (Overestimated)}$$

<예제> n=4일 때 심프슨 공식을 이용하여 $\int_0^1 3x^2\,dx$ 의 근사값을 구하라

$$\int_0^1 3x^2\,dx \cong \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$= \frac{1}{(3)(4)}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right] = 1.0 \quad \text{(Most accurate)}$$

- 적분의 근사값 구하기

1. 중점법칙

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{1}{2}(x_0+x_1)\right)+f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)\right)\right]$$

2. 사다리꼴 법칙

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

3. 심프슨 공식

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\begin{bmatrix} f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+ \\ \cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n) \end{bmatrix}$$

<연습문제 4.7>

<문제2> n=4의 경우 중점법칙, 사다리꼴법칙, 심프슨공식을 이용하여 적분의 근사값을 구하라

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

(a) 중점법칙

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx \cong \frac{3-1}{4}\left[f\left(1+\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7} + \frac{4}{9} + \frac{4}{11}\right) = \frac{3776}{3465} = 1.089$$

(Underestimated)

(b) 사다리꼴법칙

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx = \frac{3-1}{2(4)}\left[f(1) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(2) + 2f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{3} + 1 + \frac{4}{5} + \frac{1}{3}\right) = 1.117$$

(Overestimated)

(c) 심프슨공식

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx = \frac{3-1}{3(4)}\left[f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(2) + 4f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{8}{3} + 1 + \frac{8}{5} + \frac{1}{3}\right) = 1.1$$

(In between)

<문제 4> n=4의 경우 다음 적분의 근사값을 구하라

$$\sin 1 = \int_0^1 \cos dx \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$$

(a) 중점법칙 $$\frac{1}{4}\left\{f\left[\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right)\right]+f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)\right]+f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)\right]+f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{4}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{1}{8}\right)+\cos\left(\frac{3}{8}\right)+\cos\left(\frac{5}{8}\right)+\cos\left(\frac{7}{8}\right)\right] = -0.002195\ (Underestimated)$$

(b) 사다리꼴 법칙 $$\frac{1}{2(4)}\left[f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{2}{4}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{4}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\cos(0)+2\cos\left(\frac{1}{4}\right)+2\cos\left(\frac{2}{4}\right)+2\cos\left(\frac{3}{4}\right)+\cos\left(\frac{4}{4}\right)\right] = 0.004387\ \ (Overestimated)$$

(c) 심프슨 공식 $$\frac{1}{3(4)}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{2}{4}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{4}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{12}\left[\cos(0)+4\cos\left(\frac{1}{4}\right)+2\cos\left(\frac{2}{4}\right)+4\cos\left(\frac{3}{4}\right)+\cos\left(\frac{4}{4}\right)\right] = -0.000018\ \ (In\ between)$$

- 4.8 적분으로서의 자연로그 (Natural logarithm as an integral)

자연로그는 밑수 e인 로그함수로 정의

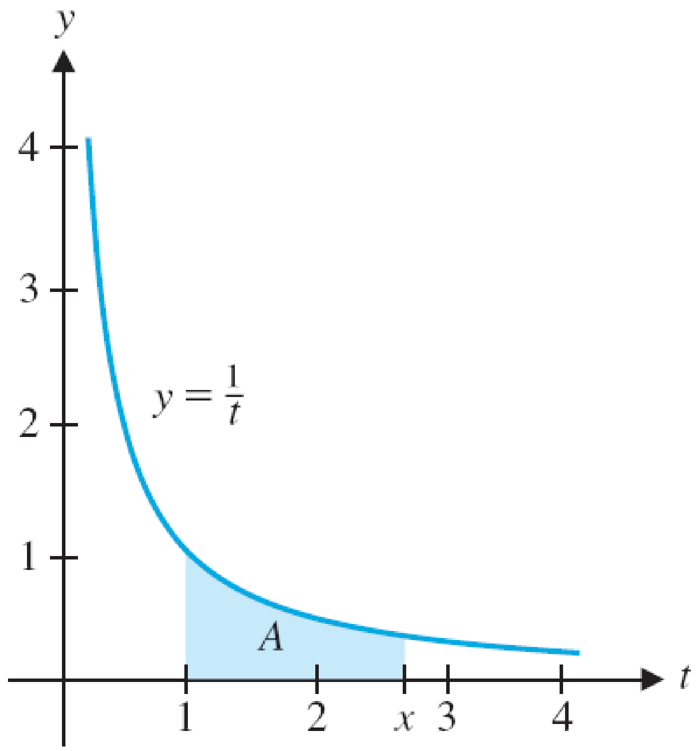
$\ln x = \log_e x$ e : 초월함수 ≈ 2.71828...(무리수)

(정의 8.1) x>0일 때 자연로그함수는 다음과 같다

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

t=1과 t=x 사이 $\frac{1}{t}$ 아래의 넓이

Thus, $\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt$ t=1과 t=3 사이의 $\frac{1}{t}$ 아래의 넓이.



(정리 8.1) 임의의 양수 a,b>0와 유리수 r에 대하여 다음 성질이 성립된다.

(1) $\ln 1 = 0$ (2) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

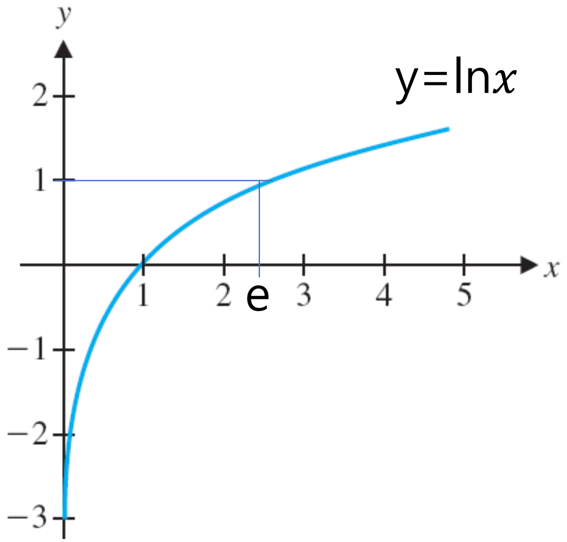
(3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, (4) $\ln(a^r) = r\ln a$

<예제> 로그의 성질을 이용한 미분 : 연쇄법칙과 나눗셈의 법칙 적용

$$\frac{d}{dx}\ln\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^2+5}} = \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{(x-2)^3}{x^2+5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\frac{(x-2)^3}{x^2+5} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{(x-2)^3}{x^2+5}}\frac{d}{dx}\frac{(x-2)^3}{x^2+5}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+5)\{3(x-2)^2(x^2+5)-2x(x-2)^3\}}{(x-2)^3(x^2+5)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2x}{x^2+5}\right)$$

<예제> ln$x$ 의 극한값의 성질 분석 $\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$



(정의 8.2) 초월함수 e를 lne=1을 만족하는 수로 정의한다

$$e^2 = e\cdot e,\qquad e^3 = e\cdot e\cdot e,\qquad e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e},\qquad e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$$

(정의 8.3)

$$\ln e^{\mathrm{x}} = x,\qquad x\in(-\infty,\infty),\qquad e^{\ln x} = x,\qquad x>0$$

(정리 8.2) 임의의 실수 r,s와 유리수 t에 대하여 다음이 성립한다

$$(1)\ e^r e^s = e^{r+s}, \qquad (2)\ \frac{e^r}{e^s} = e^{r-s}, \qquad (3)\ (e^r)^t = e^{rt}$$

일반 로그와 지수의 성질을 이용하여 일반 지수함수를 자연 지수함수로 바꾸어서 미분, 적분을 한다.

$$b^x = e^{\ln(b^x)} = e^{x\ln b}$$

도함수 $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}b^x = \frac{d}{dx}e^{\ln b^x} = \frac{d}{dx}e^{x\ln b} = e^{x\ln b}\frac{d}{dx}(x\ln b) = e^{x\ln b}(\ln b) = b^x\ln b$ (연쇄법칙)

역도함수 $\Rightarrow$ $\int b^x\,dx = \int e^{x\ln b}\,dx = \frac{1}{\ln b}e^{x\ln b} + c = \frac{1}{\ln b}b^x + c$ (연쇄법칙)

(참고) 지수함수 $f(x) = b^x$는 $f(x) = e^{\ln b^x} = e^{x\ln b}$로 다시 고쳐 나타내고, 자연 지수함수의 미분이나 적분과 연쇄법칙을 적용하면 된다.

<예제> 지수함수의 미분

$f(x) = 2^{x^2}$를 미분하라 $\Longrightarrow$ 자연 지수함수로 바꾸고 미분

$$f(x) = 2^{x^2} = \mathrm{e}^{\ln 2^{x^2}} = \mathrm{e}^{x^2 \ln 2} \quad \therefore f'(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{x^2 \ln 2} \frac{d}{dx}(\mathrm{x}^2 \ln 2) = \mathrm{e}^{x^2 \ln 2}(2\mathrm{x}\ln 2) = (2\mathrm{x}\ln 2)\mathrm{e}^{x^2 \ln 2} = 2^{x^2} 2\mathrm{x}\ln 2$$

(정의 8.3) 임의의 밑수 a>0(a≠1)와 임의의 x>0에 대하여 $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln \mathrm{a}}$가 된다.

일반 로그함수에 대한 도함수를 구하기 위해서 자연 로그함수로 나타낸다. 그리고 미분한다.

$y = \log_a x \ \Rightarrow \ x = a^y$ 양변에 자연로그를 취한다

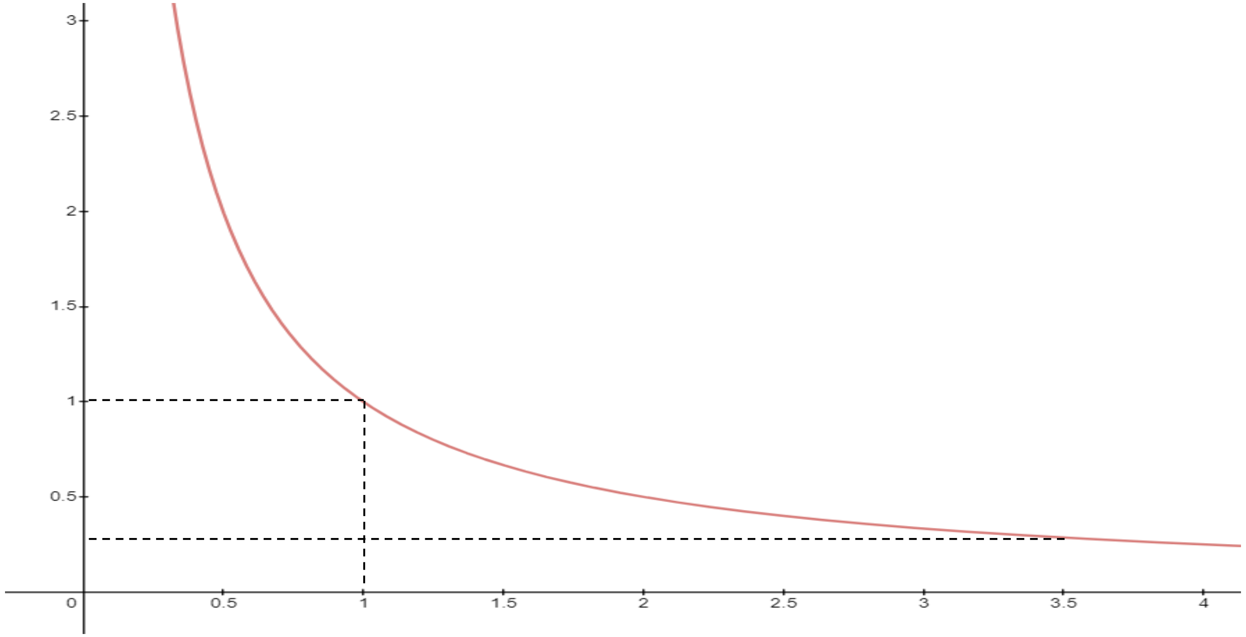
$$\ln x = \ln \mathrm{a}^{\mathrm{y}} = \mathrm{y}\ln \mathrm{a} \qquad \therefore y = \frac{\ln x}{\ln \mathrm{a}}$$

도함수 $\Rightarrow$ $$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln \mathrm{a}}\right) = \frac{1}{\ln \mathrm{a}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{\ln \mathrm{a}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln \mathrm{a}}$$

<연습문제4.8>

<문제 1> 다음을 적분으로 나타내고 그 영역을 그림으로 나타내어라

$$\ln 4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln x \Big|_1^4 = \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$$



<문제 3>
n=4 일 때 심프슨 공식을 이용하여 ln 4의 근사값을 구하라

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[\begin{matrix} f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \\ \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \end{matrix}\right]$$

$$\ln 4 = \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = 0.75 \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.75, \quad x_2 = 2.5, \quad x_3 = 3.25, \quad x_4 = 4.0$$

$$\Rightarrow \approx \frac{3}{3(4)}\left(\frac{1}{1} + 4\cdot\frac{1}{1.75} + 2\cdot\frac{1}{2.5} + 4\cdot\frac{1}{3.25} + \frac{1}{4}\right) \approx 1.39162$$

- 로그의 성질을 이용하여 다음 값을 하나의 항으로 나타내어라

< 문제 5 > $\ln\sqrt{2} + 3\ln 2 = \ln\sqrt{2} + \ln 2^3 = \ln 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \ln 2^{\left(3+\frac{1}{2}\right)} = \ln 2^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}\ln 2$

<문제 6> $2\ln 3 - \ln 9 + \ln\sqrt{3} = \ln\frac{3^2\cdot\sqrt{3}}{9} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$

- 로그의 성질을 이용하여 다음 도함수를 구하라

<문제 7> $\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{x^2+1}$ or $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{x}{x^2+1}$

<문제 8> $\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x^4}{x^5+1}\right) = \frac{1}{\frac{x^4}{x^5+1}} \cdot \frac{4x^3(x^5+1) - 5x^4(x^4)}{(x^5+1)^2}$

(참고) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$

<문제 9> $\frac{d}{dx}\log_7\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{\ln 7}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\ln 7}\right) = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln 7}\right)$

$$= \frac{1}{2\ln 7}\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) = \frac{1}{2\ln 7}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x) = \frac{1}{\ln 7}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

<문제 10> $\frac{d}{dx}(3^{sinx}) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln 3^{sinx}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sin x\ln 3}\right) = e^{\sin x\ln 3}(\ln 3)\cos x = 3^{\sin x}(\ln 3)\cos x$

또는

$y = 3^{\sin x}$ 양쪽에 로그를 취함 $\Rightarrow$ $\ln y = \ln 3^{\sin x} = \sin x\ln 3 \Rightarrow$ 양쪽을 x에 관하여 미분

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln 3\cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\ln 3\cos x = 3^{\sin x}(\ln 3)\cos x$$

- 다음을 적분하여라 (치환적분을 하라)

(참고) $b^x = e^{\ln b^x} = e^{x \ln b}$

$$\int b^x\,dx = \int e^{x\ln b}\,dx$$

$$= e^{x \ln b}\frac{1}{\ln b} + c \;= \frac{b^x}{\ln b} + c$$

<문제 11> $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$ $\quad u = \ln x,\quad du = \frac{1}{x}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

<문제 12> $\int x3^{x^2}\,dx$ $\quad u = x^2,\quad du = 2xdx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int 3^u\,du = \frac{1}{2}\int e^{\ln 3^u}\,du = \frac{1}{2}\int e^{u(\ln 3)}\,du$$

$$= \frac{1}{2}e^{u(\ln 3)}\frac{1}{\ln 3} + c = \frac{e^{u(\ln 3)}}{2\ln 3} + c = \frac{e^{\ln 3^u}}{2\ln 3} + c = \frac{3^u}{2\ln 3} + c = \frac{3^{x^2}}{2\ln 3} + c$$

<문제 13> $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\,dx$ $\quad u = \frac{2}{x},\quad du = -\frac{2}{x^2}dx$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + c = -\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}} + c$$

<문제 14> $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3-4}\,dx$ $\quad u = x^3 - 4,\quad du = dx\,3x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-4}^{-3}\frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln|u|\Big|_{-4}^{-3} = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 4) = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{4}$$

$u(0) = -4$
$u(1) = -3$