제 8주

2계 미분방정식

2nd Order Differential Equations

2계 미분방정식의 정의

- 2계 선형 미분방정식

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{3.3}$$

- 제차와 비제차 미분방정식의 구분

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \begin{cases} = 0 & \text{제차 미분방정식} \quad y_h \\ \neq 0 & \text{비제차 미분방정식} \quad y_p \end{cases} \tag{3.4}$$

일반해 $y = \underline{y_h} + y_p \Rightarrow y'' + py' + qy = r(x)$

$y'' + py' + q(x)y = 0$

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

[표 3-1] 특성방정식의 근의 종류에 따른 기저 및 일반해의 형태

	특성방정식의 근	해의 기저	2계 제차 미분방정식의 일반해
A	서로 다른 두 실근 λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}$ $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
B	중근 $\lambda = -\frac{a}{2}$	$e^{\lambda x} = e^{-\frac{a}{2}x}$ $xe^{\lambda x} = xe^{-\frac{a}{2}x}$	$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$ $= (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}$
C	공액복소근 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

$$y'' + ay' + by = 0$$

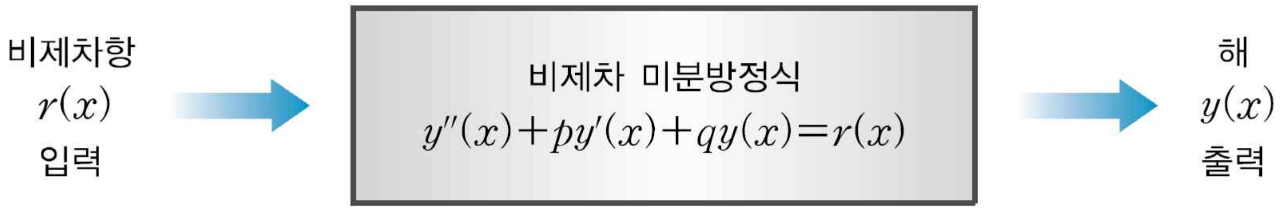
$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}_{\text{특성 방정식}}$$

비제차 미분방정식

- 비제차 미분방정식 : $\boldsymbol{r(x) \neq 0}$인 경우

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

➢ 미분방정식에서의 입력과 출력



[그림 3-1] 비제차 미분방정식 시스템의 입출력 관계

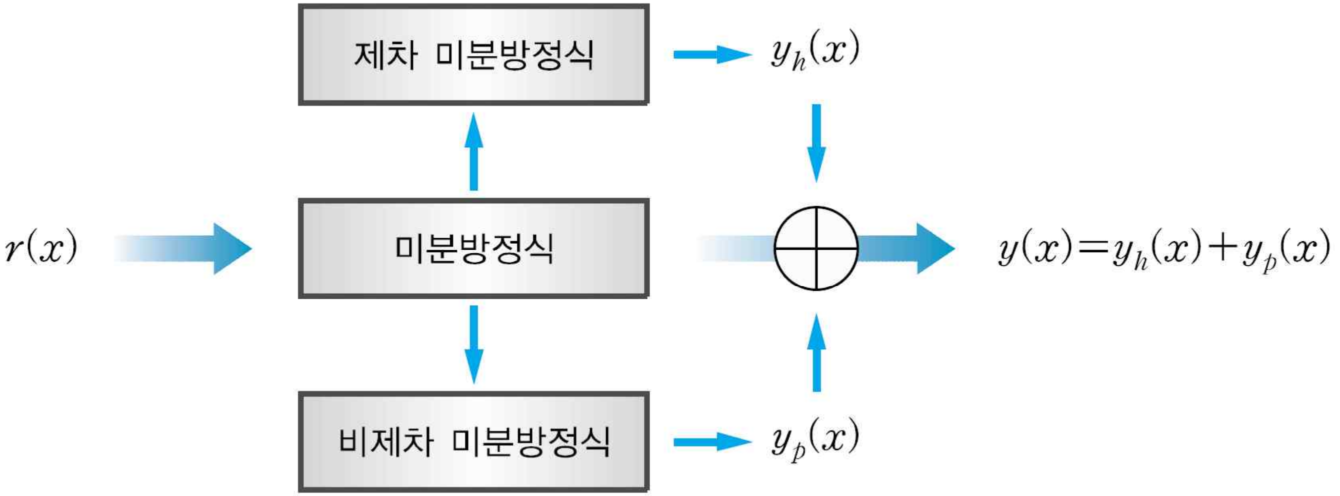
➢ 비제차 미분방정식의 일반해

$$y(x) = \underbrace{y_h(x)}_{\text{제차 미분방정식의 일반해}} + \underbrace{y_p(x)}_{r(x) \neq 0\text{인 경우의 해}} \qquad (3.29)$$

비제차 미분방정식

정리 3-2 비제차 미분방정식의 일반해의 구성

비제차 미분방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \neq 0$의 일반해 $y(x)$는 제차 미분방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$의 일반해 $y_h(x)$와 비제차항 $r(x)$로 인해 얻어지는 특수해 $y_p(x)$가 더해진 형태로 나타난다.



[그림 3-2] 비제차 미분방정식의 해의 구성

비제차 미분방정식

비제차 미분방정식의 일반해

주어진 y_p가 다음 비제차 미분방정식의 특수해가 되는지 확인한 후 일반해를 구하라.

$$y'' - 2y' + y = e^x \sin x, \quad y_p = -e^x \sin x$$

key point

비제차 미분방정식에 y_p를 대입하여 $r(x)$가 얻어지면 y_p는 특수해다.

미정계수법

- 미정계수법 : 비제차 미분방정식의 특수해 $y_p(x)$를 구할 때 사용
  - 상수계수를 가진 **2**계 비제차 미분방정식의 표준형

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = r(x), \quad (a, b\text{는 상수}) \qquad (3.30)$$

간단한 미정계수법

$$y'' + 2y' + y = 3e^{2x}$$

- **1**단계 : 특수해 $y_p(x)$ 형태 가정 $\qquad y_p(x) = Ke^{2x}$
- **2**단계 : 원 식에 대입 $\qquad y_p'' + 2y_p' + y_p = 3e^{2x}$
- **3**단계 : 상수 K를 구하면, 특수해도 구해짐

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = 4Ke^{2x} + 4Ke^{2x} + Ke^{2x} = 9Ke^{2x} = 3e^{2x}$$

$$K = \frac{1}{3}, \quad y_p(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$$

미정계수법

다항함수의 경우

[표 3-2] 비제차항이 다항함수인 경우, 비제차 미분방정식의 특수해 형태 설정

$r(x)$ 의 형태	$y_p(x)$ 형태의 설정
k	K
$k_1x + k_0$	$K_1x + K_0$
$k_2x^2 + k_1x + k_0$	$K_2x^2 + K_1x + K_0$
$\vdots$	$\vdots$
$k_nx^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1x + k_0$	$K_nx^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1x + K_0$

미정계수법

미정계수법의 예 : 다항함수

key point

$r(x) = 9x^2$

$y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'' + 9y = 9x^2$$

① $y'' + 9y = 0$

$y = e^{mx}$, $m^2 + 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3i$

$y_h = A\cos 3x + B\sin 3x$

② $y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$ $\Rightarrow$ $2K_2 + 9K_2x^2 + 9K_1x + 9K_0 = 9x^2$

$y_p' = 2K_2x + K_1$

$y_p'' = 2K_2$

$\underbrace{9K_2}_{=9}x^2 + \underbrace{9K_1}_{=0}x + \underbrace{(2K_2 + 9K_0)}_{=0} = 9x^2$

$9K_2 = 9$, $K_1 = 0$, $2K_2 + 9K_0 = 0$

$K_2 = 1$, $K_0 = -\frac{2}{9}$

$\therefore y_p = x^2 - \frac{2}{9}$

미정계수법

지수함수의 경우

[표 3-3] 비제차항이 지수함수인 경우, 비제차 미분방정식의 특수해 형태 설정

$r(x)$ 의 형태	$y_p(x)$ 형태의 설정
$ke^{\lambda x}$	$Ke^{\lambda x}$

ex) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$

$y_p = ke^x$ 라 하면, $y_p' = ke^x$, $y_p'' = ke^x$

대입: $ke^x - 5ke^x + 4ke^x = 8e^x$

$0 \cdot e^x = 8e^x$

$0 = 8e^x$ (모순)

$\Rightarrow y_p = ke^x$ 로 가정이 잘못.

미정계수법

- **변형된 형태 :** 제차 미분방정식의 해에 비제차항의 형태가 이미 나타나 있는 경우

[표 3-4] 제차 미분방정식의 해에 비제차항의 형태가 이미 나타나 있는 경우, 비제차 미분방정식의 특수해 형태 설정

제차 미분방정식의 해	$r(x)$의 형태	$y_p(x)$ 형태의 설정
$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$	$ke^{\lambda_1 x}$	$Kxe^{\lambda_1 x}$
$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$		$Kx^2 e^{\lambda_1 x}$

미정계수법

미정계수법의 예 : 지수함수 ②

다음 미분방정식의 일반해를 구하라.

$$y'' - 3y' - 4y = 10e^{-x}$$

key point

$r(x) = e^{-x}$

$y_h = \cdots + c_2 e^{-x}$

$y_p = Kxe^{-x}$

미정계수법

삼각함수의 경우

[표 3-5] 비제차항이 삼각함수인 경우, 비제차 미분방정식의 특수해 형태 설정

$r(x)$의 형태	$y_p(x)$ 형태의 설정
$a\cos\alpha x$	$A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$
$b\sin\alpha x$	
$a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$	

미정계수법

미정계수법의 예 : 삼각함수

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'' + 2y' + y = 6.25\cos 2x$$

key point

비제차 미분방정식의 특수해 형태

$y_p = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y_p' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

$\Rightarrow -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = 6.25\cos 2x$

$\Rightarrow \underbrace{(-4A + 4B + A)}_{=6.25}\cos 2x + \underbrace{(-4B - 4A + B)}_{=0}\sin 2x = 6.25\cos 2x$

미정계수법

여러 종류의 함수가 결합된 경우

[표 3-6] 비제차항이 함수의 결합으로 구성된 경우, 비제차 미분방정식의 특수해 설정

$r(x)$ 의 형태	$y_p(x)$ 형태의 설정
$kf(x)+lg(x)+mh(x)+\cdots$	$Kf(x)+Lg(x)+Mh(x)+\cdots$

미정계수법의 예 : 함수의 결합된 형태

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y''+2y'+5y=13e^{2x}+17\cos 2x$$

key point

비제차 미분방정식의 특수해 형태

$y_p = Ke^{\alpha x}+L\cos\beta x+M\sin\beta x$

Thank you!