제 11주

라플라스 변환

Laplace Transformation

알아두어야 할 개념과 공식

- 변환

- 부정적분과 정적분의 표현

부정적분 : $\int f(t)dt = F(t) + c$

정적분 : $\int_a^b f(t)dt = |F(t)|_a^b = F(b) - F(a)$

- 오일러 공식

삼각함수 : $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i} \end{cases}$

쌍곡선함수 : $\begin{cases} e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta \\ e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \cosh\theta = \dfrac{(e^{\theta} + e^{-\theta})}{2} \\ \sinh\theta = \dfrac{(e^{\theta} - e^{-\theta})}{2} \end{cases}$

라플라스 변환

- 라플라스 변환 개념 : t 에 대한 함수를 s 에 대한 함수로 투영시키는 도구
  - 연산자 : $\mathcal{L}$ 기호 사용, '라플라스'라고 읽음
  - 시간함수 $f(t)$를 라플라스 변환한 함수 = $\mathcal{L}\{f(t)\}$
  - 함수 $f(t)$를 라플라스 변환한 결과는 s의 함수로 나타남
  - $f(t)$를 라플라스 변환한 값은 $F(s)$로 나타냄
  - 라플라스 변환 결과

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=F(s) \tag{7.1}$$

- 라플라스 역변환 : t 를 독립변수로 하는 공간으로 되돌아오게 하는 작업

라플라스 변환식

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s) \tag{7.2}$$

역변환 과정

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t) \tag{7.3}$$

라플라스 변환

- 라플라스 변환 및 역변환 과정

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

정의식에 따른 라플라스 변환 : 상수

$f(t)=1$의 라플라스 변환 값을 구하라.

key point

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$e^{-\infty}=\frac{1}{e^\infty}=\frac{1}{\infty} \rightarrow 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}\,1\,dt=\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty$$

$$=-\frac{e^{-s\cdot\infty}}{s}+\frac{e^{-s\cdot 0}}{s}$$

$$=\frac{1}{s}\ (s>0)$$

$$\therefore \boxed{\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}}$$

라플라스 변환

정의식에 따른 라플라스 변환 : 지수함수

(a) $f(t) = e^{t}$의 라플라스 변환 값을 구하라.

(b) $f(t) = e^{-t}$의 라플라스 변환 값을 구하라.

key point

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} \rightarrow 0$$

(a) $\mathcal{L}\{e^{t}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{t} dt = \int_0^\infty e^{-(s-1)t} dt$

$= \left[-\frac{e^{-(s-1)t}}{(s-1)} \right]_0^\infty = -\frac{e^{-(s-1)\cdot\infty}}{(s-1)} + \frac{1}{(s-1)}$

$= \frac{1}{s-1} \quad (s>1)$

(b) $\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-(s+1)t} dt$

$= \left[-\frac{e^{-(s+1)t}}{(s+1)} \right]_0^\infty = -\frac{e^{-(s+1)\cdot\infty}}{(s+1)} + \frac{e^{0}}{s+1}$

$= \frac{1}{s+1} \quad (s>-1)$

라플라스 변환

정의식에 따른 라플라스 변환 : t 함수

$f(t)=t$의 라플라스 변환 값을 구하라.

key point

부분적분법

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot t\,dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}t\right]_0^\infty + \int \frac{e^{-st}}{s}dt$$

$$= -\frac{\infty}{s\cdot e^\infty} + 0 + \frac{1}{s}\int e^{-st}dt$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\}$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

라플라스 변환

➢ 기본적인 함수들의 라플라스 변환 및 역변환 관계

$$f(t) = 1 \quad \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \quad F(s) = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = t \quad \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \quad F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = e^{at} \quad \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \quad F(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(t) = e^{-at} \quad \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \quad F(s) = \frac{1}{s+a}$$

라플라스 변환의 선형성

선형성 정리

정리 7-1 라플라스 변환의 선형성

함수 $f(t)$와 $g(t)$의 라플라스 변환이 존재한다면, $f(t)$와 $g(t)$의 선형결합으로 이루어진 함수의 라플라스 변환은 다음과 같은 성질을 띤다. 여기서 a와 b는 상수다.

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

선형성을 이용한 라플라스 변환의 계산

(a) $f(t)=m+e^{nt}$의 라플라스 변환 값을 구하라. (m, n은 상수)

$$\mathcal{L}\{m+e^{nt}\}=\mathcal{L}\{m\}+\mathcal{L}\{e^{nt}\}$$

$$=m\mathcal{L}\{1\}+\mathcal{L}\{e^{nt}\}$$

$$=m\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{s-n}$$

key point

$\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}$

$\mathcal{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}(e^{-at})=\frac{1}{s+a}$

라플라스 변환의 선형성

ex) $L\{\sin 2t\}$

$$L\{\sin 2t\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin 2t\,dt$$

$$= \frac{-e^{-st}\sin 2t}{s}\Big|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt$$

$$= \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt, \qquad s > 0$$

$$= \frac{2}{s}\left[\frac{-e^{-st}\cos 2t}{s}\Big|_0^\infty - \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin 2t\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin 2t\,dt = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}L\{\sin 2t\}, \quad s > 0$$

$$\left[1 + \frac{4}{s^2}\right]L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2}$$

$$\underline{L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}, \qquad s > 0}$$

라플라스 변환의 선형성

선형성을 이용한 삼각함수의 라플라스 변환

오일러 공식을 이용하면 지수함수를 $e^{i\lambda t} = \cos\lambda t + i\sin\lambda t$ 와 같이 삼각함수의 합으로 나타낼 수 있다. 이 관계식을 이용하여 삼각함수 $\cos\lambda t$와 $\sin\lambda t$의 라플라스 변환 값을 구하라.

key point

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$

$$e^{i\lambda t} = \cos\lambda t + i\sin\lambda t$$
$$e^{-i\lambda t} = \cos\lambda t - i\sin\lambda t$$
$$\Rightarrow \cos\lambda t = \frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos\lambda t\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}\}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{i\lambda t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-i\lambda t}\}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-i\lambda} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+i\lambda}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s+i\lambda}{(s-i\lambda)(s+i\lambda)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s-i\lambda}{(s+i\lambda)(s-i\lambda)}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s+i\lambda}{s^2+\lambda^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s-i\lambda}{s^2+\lambda^2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+\lambda^2}$$
$$= \frac{s}{s^2+\lambda^2}$$

$$\therefore \boxed{\mathcal{L}\{\cos\lambda t\} = \frac{s}{s^2+\lambda^2} \quad \mathcal{L}\{\sin\lambda t\} = \frac{\lambda}{s^2+\lambda^2}}$$

라플라스 변환

Theorem. Transforms of Same Basic Functions

(1) $L(1) = \dfrac{1}{s}$

(2) $L\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1,2,3$

(3) $L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

(4) $L\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

(5) $L\{\cos kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

(S는 수렴할 수 있는 값으로 한정)

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ inverse Laplace Transform of F(s)

① $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1,$ ② $L^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$

③ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at},$ ④ $L^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\right\} = \sin kt$

⑤ $L^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt$

Thank you!