제 7주

2계 미분방정식

2nd Order Differential Equations

Contents

알아두어야 할 개념과 공식

- 2차 방정식의 근의 공식과 판별식

- 복소수의 정의

- 오일러 공식

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- 신호와 시스템

- 두 함수의 곱의 미분법

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

2계 미분방정식의 정의

- 2계 선형 미분방정식

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{3.3}$$

구동함수 : 시스템의 입력을 나타내는 부분

- 제차와 비제차 미분방정식의 구분

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \begin{cases} = 0 & \text{제차 미분방정식} : y_h \\ \neq 0 & \text{비제차 미분방정식} : y_p \end{cases} \tag{3.4}$$

$y = y_h + y_p$

2계 미분방정식의 정의

2계 선형 미분방정식의 형태

다음 2계 미분방정식의 표준형을 구하고, 제차와 비제차로 구분하라.

(a) $e^x y'' - 2x^5 y' + 4y \ln x = 0$

(b) $2xy'' + x^2 y' = 9e^{2x} + 4x^3$

key point

2계 미분방정식의 표준형

$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

2계 미분방정식의 정의

- 2계 제차 미분방정식

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.5}$$

정리 3-1 중첩의 원리(선형성의 원리)
제차 선형 미분방정식인 식 (3.5)에서 얻어진 두 해의 일차결합 역시 식 (3.5)의 해가 된다. 즉 각각의 해 y_1, y_2에 서로 다른 상수 c_1, c_2가 곱해진 c_1y_1과 c_2y_2를 더한 값 $c_1y_1 + c_2y_2$ 역시 식 (3.5)의 해가 된다.

- 2계 제차 미분방정식의 일반해

$$y = c_1\underbrace{y_1}_{\text{기저}} + c_2\underbrace{y_2}_{\text{기저}}, \quad (c_1,\ c_2\text{는 상수}) \tag{3.6}$$

2계 미분방정식의 정의

미분방정식의 기저, 일반해, 특수해의 관계

미분방정식 $y'' - y = 0$의 일반해가 $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$으로 구해졌다.

(a) 위 미분방정식의 해의 기저는 무엇인가?

(b) 초기조건이 $y(0) = 5$, $y'(0) = -1$인 경우의 특수해를 구하라.

key point

미분방정식의 일반해는 도함수의 차수의 수만큼 기저를 갖는다.

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

- 상수계수를 갖는 제차 미분방정식의 표준형

$$y'' + ay' + by = 0, \quad (a,\ b\text{는 상수}) \tag{3.8}$$

- 해의 형태를 $y = e^{\lambda x}$, (λ는 상수) 로 가정하면

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + b(e^{\lambda x}) \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \end{aligned}$$

- $y = e^{\lambda x}$는 0이 아니어야 하므로

$$\underline{\lambda^2 + a\lambda + b = 0} \tag{3.11}$$

미분방정식의 특성방정식

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

- 특성방정식의 해 구하기

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{3.12}$$

- 특성방정식의 근의 유형

❶ $a^2 - 4b > 0$이면, 서로 다른 두 실근 λ_1, λ_2

❷ $a^2 - 4b = 0$이면, 중근 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

❸ $a^2 - 4b < 0$이면, 공액복소근 λ_1, λ_2

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

- 특성방정식이 서로 다른 두 실근 λ_1, λ_2를 갖는 경우

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{3.12}$$

  - 미분방정식의 일반해

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{3.14}$$

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

특성방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우 ①

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'' - 9y = 0$$

key point

특성방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 때의 일반해

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

특성방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우 ②

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'' - 3y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = -2$$

key point

$y = e^{\lambda x}$를 미분방정식에 대입하면 도함수의 차수, 즉 미분되어있는 만큼 λ가 계수로 나온다는 사실을 기억해두면 계산이 편리하다.

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

- 특성방정식이 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$를 갖는 경우

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

➢ $a^2 - 4ac = 0$인 경우

➢ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a}{2}$ 를 얻음 ➡ $y_1 = y_2 = e^{-(a/2)x}$

➢ 미분방정식에서는 해가 겹치는 것을 허용하지 않음 ➡ $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ (3.15)

➢ 두번째 해 구하기 : 차수 축소법 이용

➢ 1단계 : 두번째 해 가정

$$y_2(x) = u(x) y_1(x) \tag{3.16}$$

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

- **2**단계 **:** 식 **(3.16)**을 미분하여 y_2'과 y_2' 구하기

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

- **3**단계 **: 2**계 제차 미분방정식에 y_2, y_2', y_2' 대입하여

$$y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$$

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0$$

- **4**단계 **:** u에 대해 정리하면 $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$, $y'' + ay' + by = 0$

$$u''y_1 + u'\underbrace{(2y_1' + ay_1)}_{=0} + u\underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0} = 0$$

- **5**단계 **:** $u''y_1 = 0$ 으로부터 $u(x)$ 를 구한다. ➡ $u'' = 0$

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

- **6**단계 **:** 두번째 해의 형태

$$u = x$$

$$y_2 = uy_1 = xy_1 = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

- **7**단계 **:** 여기에 중첩의 원리 적용

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x} \qquad (3.17)$$

$$= \underline{(c_1 + c_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}}$$

특성방정식의 일반해

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

특성방정식이 중근을 갖는 경우 ②

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

key point

먼저 미분방정식을 특성방정식의 형태로 바꾼다.

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

- 특성방정식이 공액복소근 λ_1, λ_2를 갖는 경우
  - $\boldsymbol{a^2 - 4ac < 0}$인 경우

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\omega}{2} i \quad = \alpha \pm \beta i$$

- 특성방정식이 $\boldsymbol{\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i}$ 근을 갖는 경우의 해

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

- 오일러 공식 적용

$$y_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

새로운 형태의 기저 $\boldsymbol{y_1^*, y_2^*}$ 추정 가능

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

- 새로운 형태의 기저 y_1^*, y_2^*

$$y_1 + y_2 = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$y_1 - y_2 = 2ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$\Rightarrow \quad y_1{}^* = e^{\alpha x}\cos\beta x\,, \quad y_2{}^* = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

- 여기에 중첩의 원리 적용

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= A y_1{}^* + B y_2{}^* \qquad (3.18) \\ &= \underline{e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)} \end{aligned}$$

특성방정식의 일반해

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

특성방정식이 공액복소근을 갖는 경우 ①

다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

key point

특성방정식이 공액복소근을 가질 때의 일반해

$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

상수계수를 갖는 제차 미분방정식

[표 3-1] 특성방정식의 근의 종류에 따른 기저 및 일반해의 형태

	특성방정식의 근	해의 기저	2계 제차 미분방정식의 일반해
A	서로 다른 두 실근 λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}$ $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
B	중근 $\lambda = -\dfrac{a}{2}$	$e^{\lambda x} = e^{-\frac{a}{2}x}$ $xe^{\lambda x} = xe^{-\frac{a}{2}x}$	$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$ $= (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}$
C	공액복소근 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Thank you!