제 12주

라플라스 변환

Laplace Transformation

라플라스 변환

Definition

Let $f(t)$ be defined for t≥0 ; then the integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} f(t)\, dt$$

is said to be the Laplace transform of f, provided the limitests

Theorem. Transforms of Same Basic Functions

(1) $L(1) = \frac{1}{s}$

(2) $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1,2,3$

(3) $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

(4) $L\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$

(5) $L\{\cos kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$

(S는 수렴할 수 있는 값으로 한정)

라플라스 변환

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ inverse Laplace Transform of F(s)

① $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1,$ ② $L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$

③ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at},$ ④ $L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \sin kt$

⑤ $L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt$

L^{-1} a Linear Transform

$$L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha L^{-1}\{F(s)\} + \beta L^{-1}\{G(s)\}$$

time domain S-domain

$$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s)$$

라플라스 변환

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} =$$

➢ G(s)의 인수가 모두 1차인 경우

➢ 분모인 $G(s)$의 인수가 모두 1차로 이루어져 있는 경우

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}$$

$$\frac{F(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-a_n}$$

부분분수 전개 : $G(s)$의 인수가 모두 1차인 경우

$Y(s)=\dfrac{s^2-s+2}{s(s-1)(s+1)}$를 부분분수로 전개하고, 라플라스 역변환을 구하라.

key point

$$\frac{F(s)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{A}{s-a}+\frac{B}{s-b}+\frac{C}{s-c}$$

$$Y(s)=\frac{s^2-s+2}{s(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s+1}$$

$$A(s-1)(s+1)+Bs(s+1)+Cs(s-1)=s^2-s+2$$

$$A=-2,\quad B=1,\quad C=2$$

$$Y(s)=\frac{-2}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s+1}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=-2+e^{t}+2e^{-t}$$

- G(s)가 중복된 인수를 갖는 경우
  - $(s-a)$라는 인수가 n번 중복되어 있는 경우

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s-a)^n}$$

  - 부분분수 전개

$$\frac{F(s)}{(s-a)^n} = \frac{A_n}{(s-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(s-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{s-a}$$

부분분수 전개 : $G(s)$가 중복된 인수를 갖는 경우

$Y(s)=\dfrac{s^3-4s^2+3}{s^2(s-1)(s+1)}$을 부분분수로 전개하고, 라플라스 역변환을 구하라.

key point

$$\frac{F(s)}{(s-a)^2}=\frac{A_2}{(s-a)^2}+\frac{A_1}{s-a}$$

$$Y(s)=\frac{s^3-4s^2+3}{s^2(s-1)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-1}+\frac{D}{s+1}$$

$$As(s-1)(s+1)+B(s-1)(s+1)+Cs^2(s+1)+Ds^2(s-1)=s^3-4s^2+3$$

$$A=0,\ B=-3,\ C=0,\ D=1$$

$$Y(s)=\frac{-3}{s^2}+\frac{1}{s+1}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=-3t+e^{-t}$$

◎ Partial Fractions. (important in finding inverse L.T.)

(i) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}$

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$
$$= \frac{A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)}$$

$\Rightarrow$ unknown A,B,C

$$1 = A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)$$

$s = 1$ 일 때 $1 = A(3)(5) \Rightarrow A = \dfrac{1}{15}$

$s = -2$ 일 때 $1 = B(-3)(2) \Rightarrow B = -\dfrac{1}{6}$

$s = -4$ 일 때 $1 = C(-5)(-2) \Rightarrow C = \dfrac{1}{10}$

$$\therefore \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{\frac{1}{15}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{s+2} + \frac{\frac{1}{10}}{s+4}$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} =$

라플라스 변환의 제1평행이동

제1평행이동 정리

정리 7-2 제1평행이동 정리

함수 $f(t)$에 대한 라플라스 변환 $F(s)$가 존재할 때, 함수 $f(t)$에 지수함수 e^{at}이 곱해진 $e^{at}f(t)$의 라플라스 변환은, 함수 $f(t)$의 라플라스 변환인 $F(s)$가 s축으로 a만큼 평행이동한 $F(s-a)$로 구해진다. 그 관계를 변환과 역변환 식으로 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a) \tag{7.4}$$

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} \tag{7.5}$$

라플라스 변환의 제1평행이동

감쇠진동함수의 라플라스 변환

감쇠진동(damped vibration)으로 나타나는 함수인 $e^{at}\cos bt$와 $e^{at}\sin bt$의 라플라스 변환 값을 구하라.

key point

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \left.\frac{s}{s^2+b^2}\right|_{s\to s-a}$$

$$= \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\} = \left.\frac{b}{s^2+b^2}\right|_{s\to s-a}$$

$$= \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

라플라스 변환의 제1평행이동

➢ 쌍곡선 함수의 라플라스 변환 관계

$$f(t) = \cosh at \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$f(t) = \sinh at \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

➢ 삼각함수의 라플라스 변환 관계

$$f(t) = \cos at \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$f(t) = \sin at \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

라플라스 변환의 제1평행이동

➤ 삼각함수에 지수함수가 곱해진 감쇠진동함수

$$f(t) = e^{at}\cos bt \;\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\; F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$f(t) = e^{at}\sin bt \;\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\; F(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

제1평행이동 정리를 이용한 라플라스 변환

key point

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

t^n, $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$을 라플라스 변환한 값이 $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$일 때, $t^n e^{mt}$을 라플라스 변환한 값을 구하라.

$$f(t) = t^n e^{mt} \;\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\; F(s) = \frac{n!}{(s-m)^{n+1}}$$

라플라스 변환의 제1평행이동

ex) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+2)^3}$, $L^{-1}\{F(s)\} = ?$

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{(s+2)^3}$$

$$s+1 = As(s+2)^3 + B(s+2)^3 + Cs^2(s+2)^2 + Ds^2(s+2) + Es^2$$

$$s=0 \Rightarrow B = \frac{1}{8},\ s=-2 \Rightarrow E = -\frac{1}{4}$$

$$A+C=0,\ 0=6A+B+4C+D,\ 1=8A+12B$$

$$\therefore A = -\frac{1}{16},\ C = \frac{1}{16},\ D=0$$

$$\therefore L^{-1} = \left\{\frac{-\frac{1}{16}}{s} + \frac{\frac{1}{8}}{s^2} + \frac{\frac{1}{16}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{4}}{(s+2)^3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{1}{8}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t}$$

라플라스 변환의 제1평행이동

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\} = ?$$

$$\Rightarrow \frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4} \quad \left(A=\frac{1}{8},\ B=\frac{3}{4},\ C=-\frac{1}{2},\ D=-\frac{1}{8},\ E=-\frac{3}{4}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{8}}{s} + \frac{\frac{3}{4}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s^3} + \frac{-\frac{1}{8}s-\frac{3}{4}}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{3}{8}\sin 2t \quad //$$

Thank you!