제 13주

라플라스 변환

Laplace Transformation

라플라스 변환의 제1평행이동

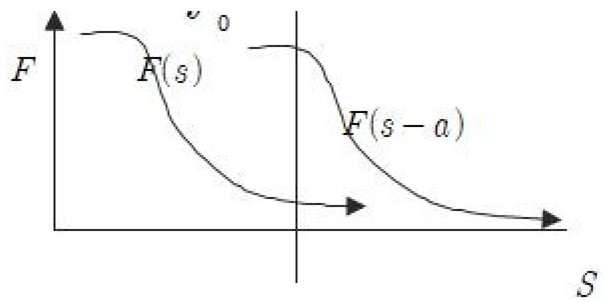
제1평행이동 정리

정리 7-2 제1평행이동 정리

함수 $f(t)$에 대한 라플라스 변환 $F(s)$가 존재할 때, 함수 $f(t)$에 지수함수 e^{at}이 곱해진 $e^{at}f(t)$의 라플라스 변환은, 함수 $f(t)$의 라플라스 변환인 $F(s)$가 s축으로 a만큼 평행이동한 $F(s-a)$로 구해진다. 그 관계를 변환과 역변환 식으로 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \tag{7.4}$$

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} \tag{7.5}$$



S축 |a|만큼 shift.

$s = a$

$$L\{e^{at}f(t)\} = L\{f(t)\}_{s\to s-a}$$

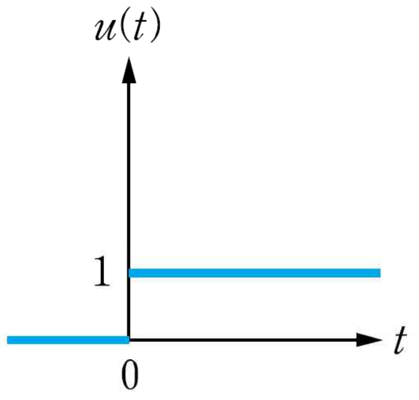
단위계단함수

- 단위계단함수 : 원점을 기준으로 +쪽은 on, −쪽은 off

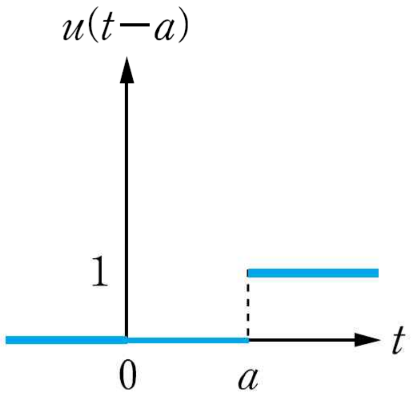
$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \tag{7.11}$$

➢ 일반화한 단위계단함수

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1 & (t > a) \end{cases} \tag{7.12}$$



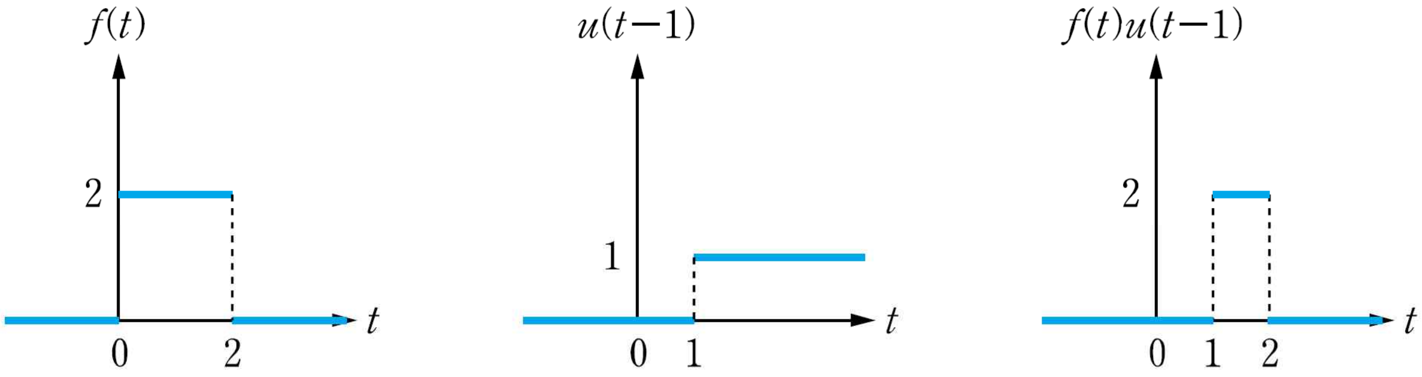
[그림 7-1] 원점을 기준으로 한 단위계단함수 $u(t)$



[그림 7-2] 일반 형태의 단위계단함수 $u(t-a)$

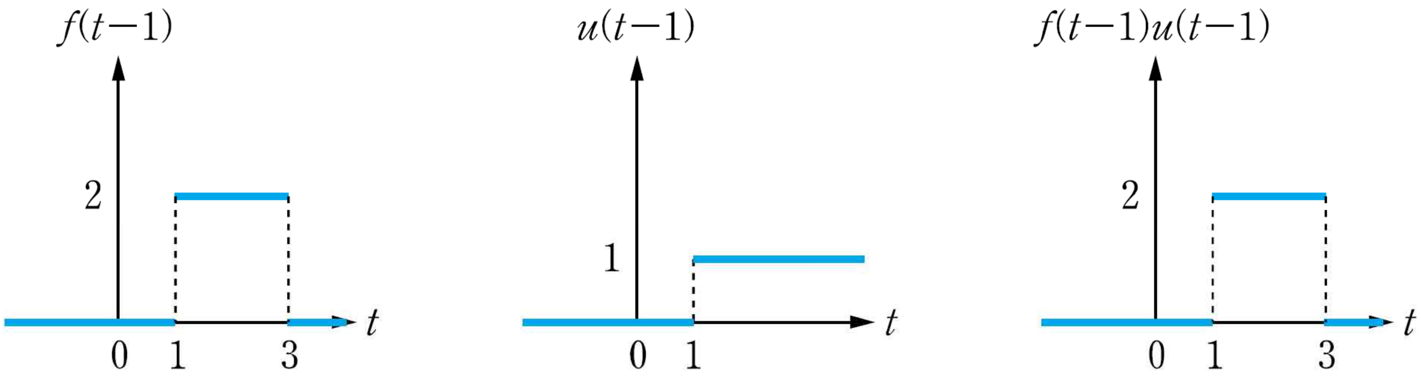
단위계단함수

➢ 주어진 신호와 단위계단함수의 곱



[그림 7-3] 주어진 함수와 단위계단함수가 곱해진 함수

➢ 단위계단함수를 이용한 신호의 이동



[그림 7-4] 주어진 함수와 단위계단함수를 이용한 신호의 이동

단위계단함수

➢ 제2평행이동 정리

정리 7-5 제2평행이동 정리

함수 $f(t)$에 대한 라플라스 변환 $F(s)$가 존재할 때, 다음과 같은 $f(t)$의 이동함수^{shifted function}

$$f_a(t) = f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ f(t-a) & (t > a) \end{cases} \qquad (7.13)$$

에 대한 라플라스 변환은 지수함수 e^{-as}이 곱해진 형태로 나타난다. 이와 같은 성질과 그 역변환에 대해 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \qquad (7.14)$$

$$f(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} \qquad (7.15)$$

단위계단함수

➢ 단위계단함수의 라플라스 변환

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \tag{7.16}$$

$$u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} \tag{7.17}$$

단위계단함수와 제2평행이동 정리

다음 함수들의 라플라스 변환 값을 구하라.

(a) $f(t) = k\{u(t-a) - u(t-b)\}$, ($k$는 상수)

(b) $f(t) = u(t-2\pi)\cos t$

key point

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

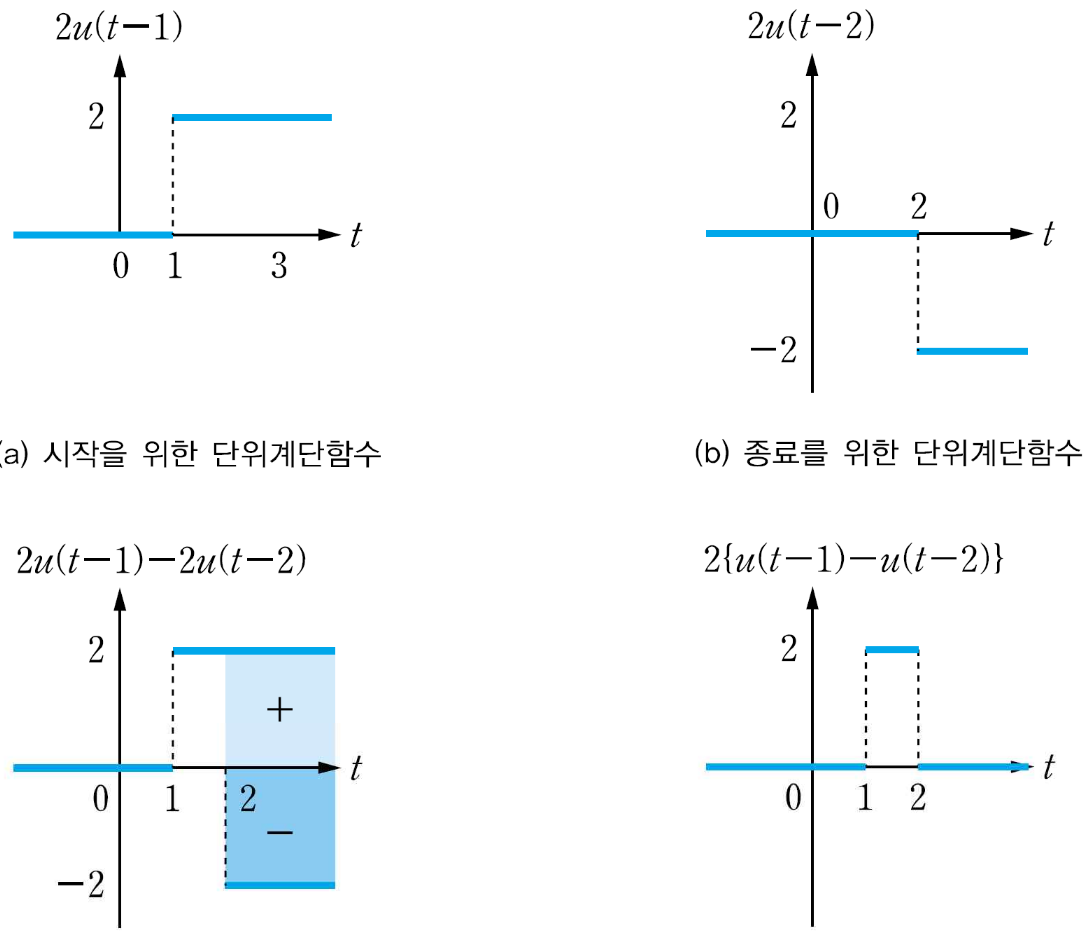
(a) $\mathcal{L}\{ku(t-a)\} - \mathcal{L}\{ku(t-b)\} = K\cdot\frac{1}{s}e^{-as} - k\frac{1}{s}e^{-bs}$

(b) $\mathcal{L}\{u(t-2\pi)\cos t\} = \mathcal{L}\{u(t-2\pi)\cos(t-2\pi)\} = \frac{s}{s^2+1}e^{-2\pi}$

단위계단함수

➢ 단위계단함수의 응용

$$f(t) = \begin{cases} 0 \ ; & t < 1 \\ 2 \ ; & 1 \le t < 2 \\ 0 \ ; & t > 2 \end{cases} \Rightarrow$$



(a) 시작을 위한 단위계단함수

(b) 종료를 위한 단위계단함수

(c) 단위계단함수의 계산 과정

(d) 결과적으로 얻은 함수

[그림 7-5] 단위계단함수의 응용 예

단위계단함수

단위계단함수의 응용 및 라플라스 변환

다음과 같이 표현되는 함수가 있다.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < \pi) \\ 1 & (\pi < t < 2\pi) \\ \sin t & (t > 2\pi) \end{cases}$$

(a) $f(t)$를 그려라.

(b) 단위계단함수를 이용하여 $f(t)$를 표현하라.

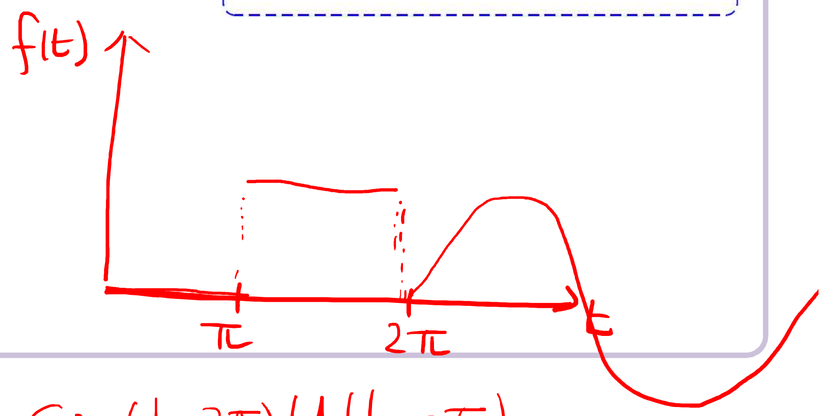
(c) $f(t)$의 라플라스 변환을 구하라.

key point

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a}$$



(b) $f(t) = u(t-\pi) - u(t-2\pi) + \sin(t-2\pi)u(t-2\pi)$

(c) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}e^{-\pi s} - \frac{1}{s}e^{-2\pi s} + \frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}$

도함수의 라플라스 변환

- 도함수의 라플라스 변환 과정
  - 1계 도함수
    - 도함수의 라플라스 변화식

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}[f'(t)]dt$$

    - 위 식을 부분적분법으로 적분하면

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} se^{-st}f(t)dt$$

$$= -f(0) + s\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

    - 최종 결과 $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ (7.6)

f(t)의 1계 도함수를 라플라스 변환한 값

도함수의 라플라스 변환

- 2계 도함수
  - 식 (7.6) 함수를 한번 더 미분

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)\\ &= s[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)\end{aligned}$$

  - 2계 도함수의 라플라스 변환식

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \qquad (7.7)$$

정리 7-3 n계 도함수의 라플라스 변환

함수 $f(t)$, $f'(t)$, $\cdots$, $f^{(n-1)}(t)$가 $t \geq 0$에서 연속이고, 함수 $f^{(n)}(t)$가 부분연속이라 하자. 이 때 모든 함수 및 도함수의 라플라스 변환이 존재하면 n계 도함수의 라플라스 변환은 다음 식과 같이 구해진다.

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (7.8)$$

라플라스 변환을 이용한 미분방정식 풀이

$$\left(\begin{array}{l} a_n \dfrac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\dfrac{dy}{dt} + a_0 y = g(t) \\ y(0)=y_0,\ y'(0)=y'_0,\ \cdots,\ y^{n-1}(0)=y_0^{(n-1)} \end{array}\right) \Rightarrow \text{initial value problem}$$

$$\text{L.T} \Rightarrow a_n L\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1}L\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\}$$

$$a_n\left[S^n Y(s) - S^{n-1}y(0) - S^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)\right] +$$

$$a_{n-1}\left[S^{n-1}Y(s) - S^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)\right] + \cdots + a_0 Y(s) = G(s)$$

$$\text{or } \left[a_n S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots a_0\right] Y(s)$$

$$= \left[a_n S^{n-1}y_0 + \cdots + y_0^{(n-1)}\right] + \left[a_{n-1}S^{n-2}y_0 + \cdots + y_0^{(n-2)}\right] + \cdots + G(s)$$

즉 $\underline{y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}}$

equation	$\underset{L}{\Rightarrow}$	Transformed equation	$\Rightarrow$	solve Transformed equation	$\overset{L^{-1}}{\Rightarrow}$	solution of original equation

(linear differential equation을 algebraic equation으로 변환)

라플라스 변환을 이용한 미분방정식 풀이

부분분수 전개

- 초깃값을 가진 2계 미분방정식

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \qquad (7.32)$$

- 식 (7.32)를 라플라스 변환하면

$$\{s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + a\{sY(s) - y(0)\} + bY(s) = R(s)$$

- 위 식을 $\boldsymbol{Y}$ 항에 대해 정리하면

$$(s^2 + as + b)Y = (s + a)y(0) + y'(0) + R$$

라플라스 변환을 이용한 미분방정식 풀이

➢ 미분방정식의 해 $\boldsymbol{y(t)}$의 라플라스 변환 $\boldsymbol{Y(s)}$는

$$Y(s) = \frac{(s+a)y(0) + y'(0) + R}{s^2 + as + b}$$

➢ 결과적으로

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)}$$

미분방정식의 라플라스 변환 형태

미분방정식 해 $\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}}$

라플라스 변환을 이용한 미분방정식 풀이

ex) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{2t},\ y(0) = 1$

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 3L\{y\} = L\{e^{2t}\}$$

$$SY(s) - y(0) - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$Y(s)(s-3) = \frac{1}{s-2} + 1$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

By partial fraction : $\dfrac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s-3}$

$$s-1 = A(s-3) + B(s-2)$$

$$s = 2, A = -1\ ;\ s = 3, B = 2$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

$$\therefore\ y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = -L\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= -e^{2t} + 2e^{3t}$$

라플라스 변환을 이용한 미분방정식 풀이

미분방정식의 라플라스 변환 ①

라플라스 변환을 이용하여 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'' - 4y = t,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$$

key point

$$\mathcal{L}(y'') = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2 - a^2}\right) = \sinh at$$

$\mathcal{L}\{y'' - 4y\} = \mathcal{L}\{t\}$

$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4Y(s) = \frac{1}{s^2}$

$s^2 Y(s) - s - 2 - 4Y(s) = \frac{1}{s^2}$

$(s^2 - 4)Y(s) = \frac{1}{s^2} + s + 2 = \frac{1 + s^2(s+2)}{s^2}$

$Y(s) = \frac{1 + s^3 + 2s^2}{s^2(s^2 - 4)}$

$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 - 4}$

$A = 0,\ B = -\frac{1}{4},\ C = 1,\ D = \frac{9}{4}$

$Y(s) = \frac{-\frac{1}{4}}{s^2} + \frac{s + \frac{9}{4}}{s^2 - 4}$

$= -\frac{1}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 - 4} + \frac{9}{4}\frac{1}{s^2 - 4}$

$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{1}{4}t + \cosh 2t + \frac{9}{8}\sinh 2t}$

라플라스 변환을 이용한 미분방정식 풀이

ex) solve $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$

$$L\{y''\} - 6L\{y'\} + 9L\{y\} = L\{t^2 e^{3t}\}$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$s^2 Y(s) - 2s - 6 - 6[sY(s) - 2] + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = 2s - 6 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s-3)^2 Y(s) = 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

$$\therefore y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^5}\right\}$$

$$= 2e^{3t} + \frac{2}{4!} \cdot t^4 e^{3t}$$

$$= 2e^{3t} + \frac{1}{12} t^4 e^{3t}$$

Thank you!