제 9주

고계 미분방정식

Higher Order Differential Equations

Contents

고계 선형 미분방정식의 형태

- 고계 선형 미분방정식의 형태

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \cdots\ ,\ y^{(n)}) = 0 \qquad (4.1)$$

  - 고계 선형 미분방정식의 표준형

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \qquad (4.3)$$

- 고계 제차 미분방정식 : 식(4.3)의 $\boldsymbol{r(x)}$가 0인 경우

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \qquad (4.4)$$

- 고계 비제차 미분방정식 : 식(4.3)의 $\boldsymbol{r(x)}$ 가 0이 아닌 경우

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \qquad (4.5)$$

고계 선형 미분방정식의 형태

Check it up!

✔ 미분연산자(differential operator)란?

미분방정식에서 각각의 도함수는 y'' 과 같이 $'$(프라임)으로 나타내거나 $y^{(2)}$와 같이 괄호 안의 숫자로 표현해왔다. 이는 각각의 도함수들을 따로 나타내는 방식이다. 이와는 달리 변수에 미분 횟수를 나타내지 않고도 미분을 의미하는 연산자를 정해서 도함수를 나타낼 수도 있다. 바로 미분연산자를 사용하는 방법이다.

미분연산자로는 일반적으로 D를 사용하며, 미분하는 변수를 x로 가정할 때 함수 f의 1차 도함수를 다음과 같이 나타낸다.

$$f' = \frac{df}{dx} = Df$$

즉 미분연산자 D는 'x로 f를 미분한다'는 의미의 연산자 역할을 한다. 위 식을 확장하면 다음과 같이 미분연산자를 사용하여 도함수를 나타낼 수 있다.

고계 선형 미분방정식의 형태

$$D^2 f = f''$$
$$D^3 f = f'''$$
$$D^4 f = f^{(4)}$$
$$\vdots$$
$$D^n f = f^{(n)}$$

미분연산자는 다음과 같이 분배법칙과 결합법칙을 만족하므로 선형연산자의 특징을 갖는다.

$$D(fg) = gDf + fDg$$
$$D(af + bg) = aDf + bDg$$

그러므로 계수가 붙은 도함수들의 조합인 미분방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$af'' + bf' + cf = (aD^2 + bD + c)f$$

한편, 미분연산자는 **도함수 연산자**(derivative operator)라고도 부른다.

고계 선형 미분방정식의 해

- 중첩의 원리

정리 4-1 중첩의 원리

고계 제차 미분방정식인 식 (4.4)에서 얻은 n개의 해의 1차결합도 식 (4.4)의 해가 된다. 즉 각각의 해 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$에 서로 다른 상수 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$을 각각 곱하여 더한 값인 $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ 역시 식 (4.4)의 해가 된다.

- 고계(n 계) 제차 미분방정식의 일반해

$$y(x)=\underline{c_1}y_1(x)+\underline{c_2}y_2(x)+\ \cdots\ +\underline{c_n}y_n(x) \tag{4.7}$$

임의의 상수

$c_1,\ ...,\ c_n$에 특정값이 주어지면 특수해

➢ 특수해를 얻으려면? n개의 초기조건이 필요함

$$y(x_0)=k_0,\ \ y'(x_0)=k_1,\ \ \cdots,\ \ y^{(n-1)}(x_0)=k_{n-1} \tag{4.8}$$

고계 선형 미분방정식의 해

정리 4-2 고계 비제차 미분방정식의 일반해의 구성

고계 비제차 미분방정식 $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)y = r(x)$의 일반해 $y(x)$는, 제차 미분방정식 $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)y = 0$의 일반해 $y_h(x)$와 비제차항 $r(x)$로 인해 얻어지는 특수해 $y_p(x)$가 더해진 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ 형태로 나타난다.

고계 미분방정식의 일반해와 특수해

(a) e^x, e^{3x}, $\sin x$, $\cos x$ 함수들이 고계 미분방정식의 기저일 때, 일반해를 구하라.

(b) 초기조건이 $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 5$, $y'''(0) = 7$일 때, 특수해를 구하라.

key point

[정리 4-1]을 적용하고, 초기조건을 대입한다.

상수계수를 갖는 고계 제차 미분방정식의 표준형

- 상수계수를 갖는 고계 제차 미분방정식의 표준형

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{4.9}$$

- 고계 제차 미분방정식의 특성방정식

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.10}$$

- 해를 지수함수 형태로 가정
- 식(4.9)에 대입하기 위해 각각의 도함수 구하기
- 도함수를 식 (4.9)에 대입
- $e^{\lambda x}$는 0이 아니어야 함

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y \\ & = \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ & = e^{\lambda x}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) = 0 \end{aligned}$$

상수계수를 갖는 고계 제차 미분방정식의 표준형

- 특성방정식이 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$을 갖는 경우

  ➢ 기저 $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ \cdots, \ y_{n-1} = e^{\lambda_{n-1} x}, \ y_n = e^{\lambda_n x}$

  ➢ 중첩의 원리를 적용해 얻은 일반해

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \qquad (4.11)$$

특성방정식이 서로 다른 실근을 갖는 경우 ①

특성방정식이 다음과 같은 식으로 나타날 때, 일반해를 구하라.

$$(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) = 0, \quad (a \neq b \neq c)$$

key point

기저를 먼저 구하자.

상수계수를 갖는 고계 제차 미분방정식의 표준형

특성방정식이 서로 다른 실근을 갖는 경우 ②

다음 미분방정식의 일반해를 구하라.

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$$

key point

특성방정식의 근이 서로 다른 실근을 가질 때의 해의 형태

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

특성방정식: $\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda = -1, 1, -3$

$\therefore e^{-3x}, e^{-x}, e^{x}$ (기저)

일반해 $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x}$

상수계수를 갖는 고계 제차 미분방정식의 표준형

특성방정식이 다중실근을 갖는 경우

- 고계 미분방정식의 특성방정식에서는 이런 경우가 많음
- 근이 겹쳐진 횟수만큼 $\boldsymbol{x}$를 곱한 후 더하는 방법을 사용함
- 특성방정식의 근에 다중실근이 포함된 경우도 같은 방법을 사용함

특성방정식이 다중실근을 갖는 경우

특성방정식이 다음과 같은 식으로 나타날 때, 일반해를 구하라.

$$(\lambda - a)^3 = 0$$

key point

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}$

상수계수를 갖는 고계 제차 미분방정식의 표준형

ex) $y^{(4)} + y'' = 0$ 을 풀어라.

$y = e^{\lambda x}$ 형태의 해이므로

$\lambda^4 + \lambda^3 = 0$ (특성방정식)

$\lambda^3(\lambda+1) = 0$

$\lambda = -1,\ 0$ (3중근)

기저: $e^{-x},\ e^{0 \cdot x},\ xe^{0 \cdot x},\ x^2 e^{0 \cdot x}$

즉, $e^{-x},\ 1,\ x,\ x^2$

$\therefore y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x}$

상수계수를 갖는 고계 제차 미분방정식의 표준형

- 특성방정식이 단일복소근 $\alpha \pm \beta i$ 를 갖는 경우

$$y = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right) \tag{4.12}$$

특성방정식이 단일복소근을 포함하는 경우

다음 미분방정식의 일반해를 구하라.

$$y''' - 4y'' + 25y' - 100y = 0$$

key point

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$y_{1,2} = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 25\lambda - 100 = 0$ (특성방정식)

$(\lambda - 4)(\lambda^2 + 25) = 0$

$\lambda = 4, \ \pm 5i$

$\therefore y = C_1 e^{4x} + e^{0 \cdot x}\left(C_2\cos 5x + C_3\sin 5x\right)$

$= C_1 e^{4x} + C_2\cos 5x + C_3\sin 5x$

상수계수를 갖는 고계 제차 미분방정식의 표준형

- 특성방정식이 복소이중근을 갖는 경우

  - 기저 $$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{4.13}$$

  - 해가 겹치면 $\boldsymbol{x}$를 곱함

$$y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x \tag{4.14}$$

  - 복소이중근을 갖는 경우의 일반해

$$y = e^{\alpha x}\left[(A_1 + A_2 x)\cos\beta x + (B_1 + B_2 x)\sin\beta x\right] \tag{4.15}$$

상수계수를 갖는 고계 제차 미분방정식의 표준형

특성방정식이 복소이중근을 갖는 경우

미분방정식의 특성방정식이 다음과 같을 때, 이 방정식의 일반해를 구하라.

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0$$

key point

두 개의 기저에 각각 x를 곱한 것이 복소이중근의 세 번째와 네 번째 기저가 된다.

$\lambda = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$ (중근)

즉, $1+i$, $1-i$, $1+i$, $1-i$ 중첩 (4개의 근)

$$y = e^{x}(A\cos x + B\sin x) + \boxed{x}\, e^{x}(C\cos x + E\sin x)$$

상수계수를 갖는 고계 비제차 미분방정식의 표준형

- 상수계수를 갖는 고계 비자체 미분방정식의 표준형

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r(x) \qquad (4.17)$$

- 고계 비제차 미분방정식의 일반해

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \qquad (4.18)$$

  - $\boldsymbol{y_{h(x)}}$: 고계 제차 미분방정식의 해
  - $\boldsymbol{y_{p(x)}}$: 고계 비제차 미분방정식의 특수해

상수계수를 갖는 고계 비제차 미분방정식의 표준형

[표 4-1] 비제차항의 함수 종류에 따른 비제차 미분방정식의 특수해 설정 형태

종류	$r(x)$	$y_p(x)$
다항함수	k k_1x+k_0 $k_2x^2+k_1x+k_0$ $\vdots$ $k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1x+k_0$	K K_1x+K_0 $K_2x^2+K_1x+K_0$ $\vdots$ $K_nx^n+K_{n-1}x^{n-1}+\cdots+K_1x+K_0$
지수함수	$ke^{\lambda x}$	$Ke^{\lambda x}$
삼각함수	$a\cos\alpha x$	$A\cos\alpha x+B\sin\beta x$
	$b\sin\beta x$	
	$a\cos\alpha x+b\sin\beta x$	
제차 미분방정식의 해에 같은 지수함수가 있는 경우	$ke^{\lambda_1 x}$	$Kxe^{\lambda_1 x}$ ($e^{\lambda_1 x}$이 있는 경우) $Kx^2e^{\lambda_1 x}$ ($xe^{\lambda_1 x}$까지 있는 경우) $\vdots$ $Kx^ne^{\lambda_1 x}$ ($x^{n-1}e^{\lambda_1 x}$까지 있는 경우)
여러 함수의 합	$kf(x)+l\,g(x)+mh(x)+\cdots$	$Kf(x)+L\,g(x)+Mh(x)+\cdots$

상수계수를 갖는 고계 비제차 미분방정식의 표준형

고계 비제차 미분방정식의 해법 ①

다음 미분방정식의 일반해를 구하라.

$$y^{(4)} - 5y''' + 4y'' = 3\cos x + 5\sin x$$

key point

고계 비제차 미분방정식의 일반해 : $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

- $y_h(x)$: 해
- $y_p(x)$: 특수해

$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$

$\lambda^2(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$

$(\lambda = \underbrace{0, 0}_{\text{중근}}, 1, 4)$

∴ 기저: e^{0x}, xe^{0x}, e^{x}, e^{4x}

$y_h = A + Bxe^{0} + Ce^{x} + Ee^{4x}$

$= A + Bx + Ce^{x} + Ee^{4x}$

$y_p = K_1 \cos x + K_2 \sin x$ 로 가정

(y_h와 겹치지 않으므로)

대입해서 계수비교후 K_1, K_2 구할 것

일반해 $y = y_h + y_p$

상수계수를 갖는 고계 비제차 미분방정식의 표준형

고계 비제차 미분방정식의 해법 ②

다음 미분방정식의 특수해를 구하라.

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 18e^{x}$$

key point

비제차 미분방정식의 특수해는 제차 미분방정식의 해의 항과 중복되지 않도록 구성한다.

① $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$(\lambda - 1)^3 = 0$

$\lambda = 1$ (3중근)

$\therefore y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

$y_p = Ae^x$ 로 가정시 y_h 와 중복

$\therefore y_p = Ax^3 e^x$ 로 가정

대입후 계수 A 결정

$\therefore y = y_h + y_p$

Thank you!