보의 처짐

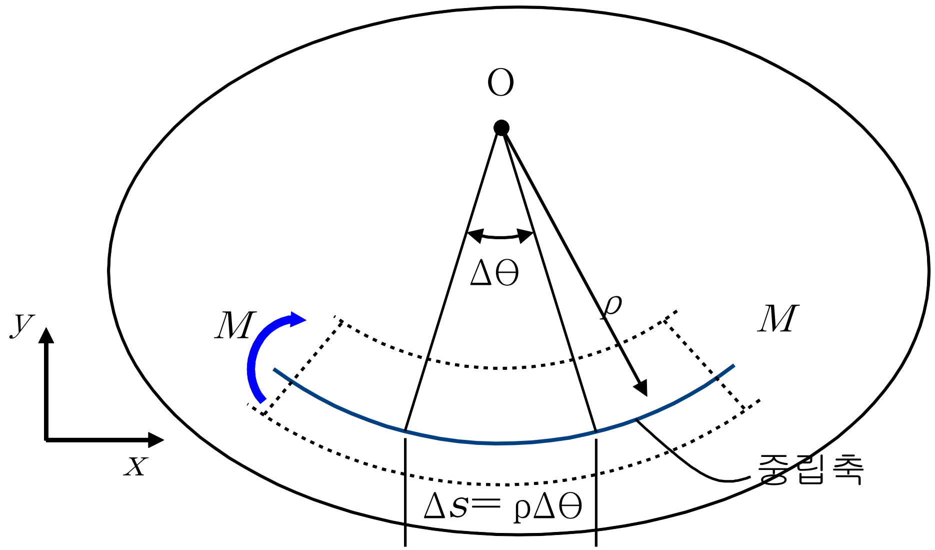


그림 9.1 곡률-굽힘모멘트 관계

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI_z} \tag{9.1}$$

(2) 곡률-처짐 관계

$$\frac{dv}{dx} = \tan\Theta \tag{9.2}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}\frac{dx}{ds} = \sec^2\Theta\frac{d\Theta}{ds}$$

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2}\frac{dx}{ds}\cos^2\Theta \tag{9.3}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dv)^2} = (dx)\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}$$

$$\cos\Theta = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{9.4}$$

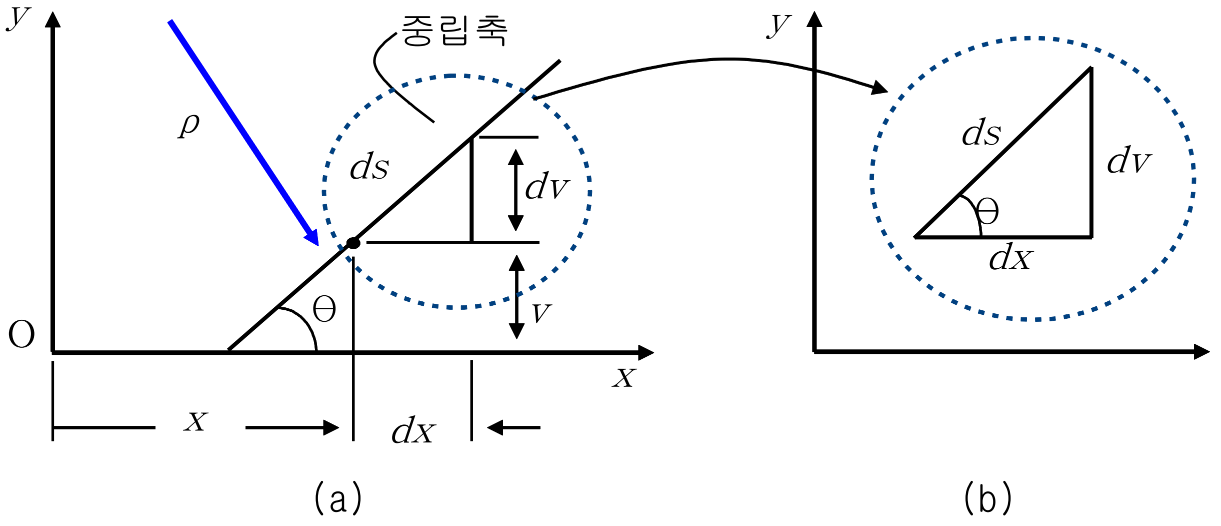


그림 9.2 곡률-처짐 미분 관계

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2}\frac{dx}{ds}\cos^2\Theta = \frac{d^2v}{dx^2}\cos^3\Theta = \frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^3 \tag{9.5}$$

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2}\left[\frac{1}{(1+0.0076)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0.988\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\boxed{\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2}} \tag{9.6}$$

(3) 모멘트-처짐의 미분관계식

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\Theta}{ds} = \frac{M}{EI_z} \qquad (9.1)$$

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d^2 v}{dx^2} \qquad (9.6)$$

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI_z}} \qquad (9.7)$$

9.3 모멘트-처짐 미분관계식의 적분에 의한 처짐 계산

9.3.1 굽힘모멘트가 연속

9.3.2 불연속함수에 의한 처짐 계산

$$\frac{dV}{dx} + w = 0 \qquad (6.55)$$

$$\frac{dM}{dx} + V = 0 \qquad (6.56)$$

$$\frac{d^2 v}{dx} = \frac{M}{EI_z} \qquad (9.7)$$

표 9.1 불연속함수 정의

명 칭	정 의	적분과 미분
특이함수 (n=-1,-2,⋯)	$f_n(x) = \langle x - a \rangle^n \begin{cases} 0 & x \neq a \text{일 때} \\ \pm\infty & x = a \text{일 때} \end{cases}$	$\int_{-\infty}^{x} f_n(x)\,dx = f_{n+1}$
맥컬레이함수 (n=0,1,2,⋯)	$f_n(x) = \langle x - a \rangle^n \begin{cases} 0 & x < a \text{ 일 때} \\ (x-a)^n & x \geq a \text{일 때} \end{cases}$	$\int_{-\infty}^{x} f_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1} f_{n+1}$ $\frac{d}{dx} f_n(x) = n f_{n-1} (n = 1, 2, 3, \cdots \text{일 때})$

표 9.2 불연속함수와 그래프

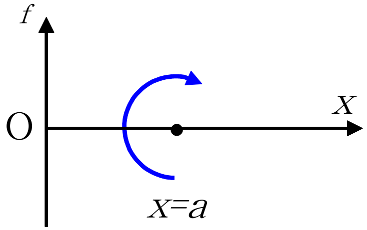
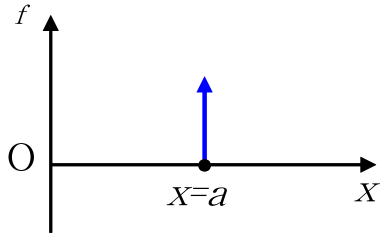
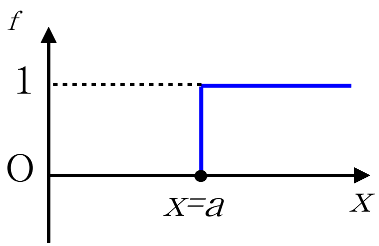
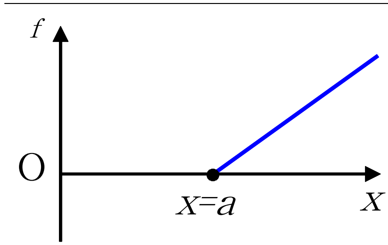
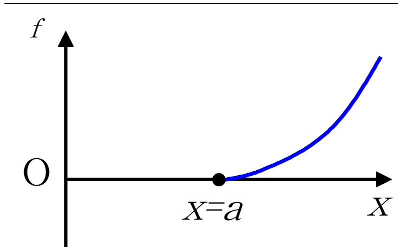
불연속함수와 그래프	적 분
 $_{2}(x) =< x-a >^{-2}$	$\int_{-\infty}^{x} f_{-2}(x)\,dx$ $= \int_{-\infty}^{x} \langle x-a\rangle^{-2}\,dx = \langle x-a\rangle^{-1} = f_{-1}(x)$
 $f_{-1}(x) = \langle x-a\rangle^{-1}$	$\int_{-\infty}^{x} f_{-1}(x)\,dx$ $= \int_{-\infty}^{x} \langle x-a\rangle^{-1}\,dx = \langle x-a\rangle^{0} = f_{0}(x)$
 $f_{0}(x) = \langle x-a\rangle^{0}$	$\int_{-\infty}^{x} f_{0}(x)\,dx$ $= \int_{-\infty}^{x} \langle x-a\rangle^{0}\,dx = \langle x-a\rangle^{1} = f_{1}(x)$
 $f_{1}(x) = \langle x-a\rangle^{1}$	$\int_{-\infty}^{x} f_{1}(x)\,dx$ $= \int_{-\infty}^{x} \langle x-a\rangle^{1}\,dx = \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^{2} = f_{2}(x)$
 $f_{2}(x) = \langle x-a\rangle^{2}$	$\int_{-\infty}^{x} f_{2}(x)\,dx$ $= \int_{-\infty}^{x} \langle x-a\rangle^{2}\,dx = \frac{1}{3}\langle x-a\rangle^{3} = f_{3}(x)$

표 9.3 여러 가지 불연속하중의 분포하중 표현

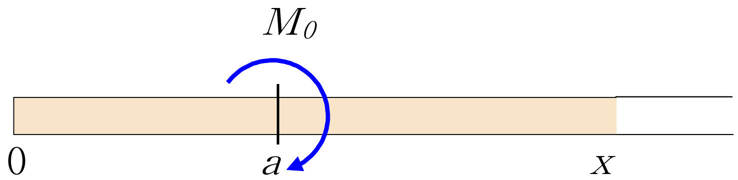
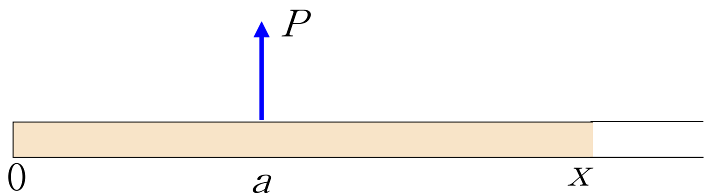
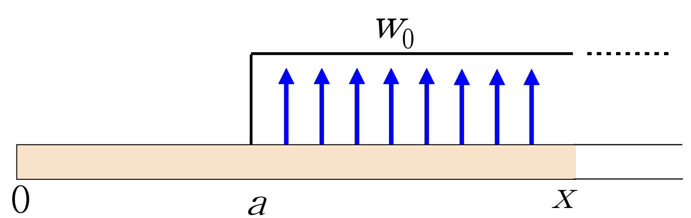
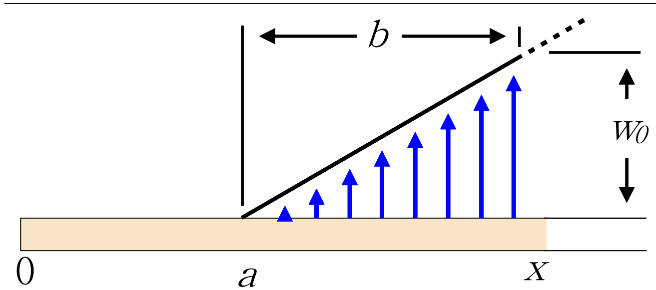
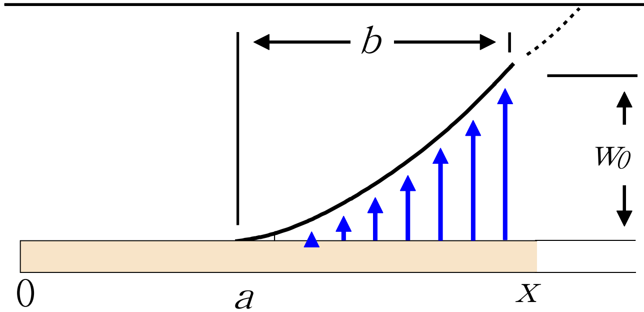
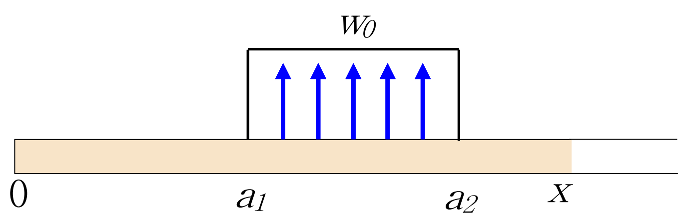
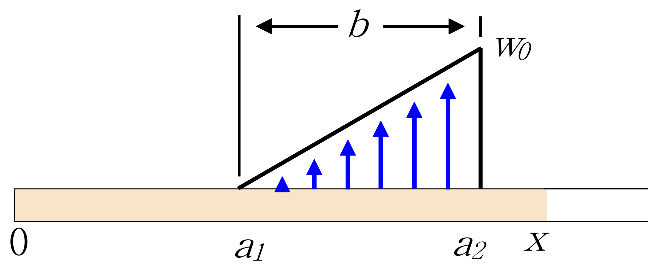
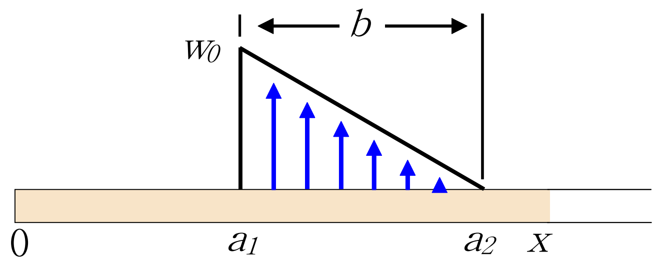
불연속하중	분포하중의 불연속함수로 표현
	$w(x) = M_0\langle x-a\rangle^{-2}$
	$w(x) = P\langle x-a\rangle^{-1}$
	$w(x) = w_0\langle x-a\rangle^{0}$
	$w(x) = \dfrac{w_0}{b}\langle x-a\rangle^{1}$

표 9.3 (계속)

불연속하중	분포하중의 불연속함수로 표현
	$w(x)=\frac{w_0}{b^2}\langle x-a\rangle^2$
	$w(x)=w_0\langle x-a_1\rangle^0-w_0\langle x-a_2\rangle^0$
	$w(x)=\frac{w_0}{b}\langle x-a_1\rangle^1-\frac{w_0}{b}\langle x-a_2\rangle^1-w_0\langle x-a_2\rangle^0$
	$w(x)=w_0\langle x-a_1\rangle^0-\frac{w_0}{b}\langle x-a_1\rangle^1+\frac{w_0}{b}\langle x-a_2\rangle^1$

불연속함수를 이용하여 보의 처짐계산까지 하는 과정

1) 평형조건을 이용하여 지점반력을 구하여 놓는다.

(이들 지점반력은 전단력과 굽힘모멘트의 부호규약에 따라 전단력과 굽힘모멘트로 표현하여 적분상수를 구할 때 활용된다.)

2) 보에 작용하는 하중을 불연속함수의 분포하중으로 나타낸다.

3) 식 (6.55), (6.56)에 대입하고 적분하여 전단력과 굽힘모멘트를 불연속함수꼴로 얻는다.

(이때 지점반력은 전단력과 굽힘모멘트로 표현되어 있어 적분상수를 구할 때 경계조건으로 이용한다.)

4) 불연속함수꼴로 얻은 굽힘모멘트를 식 (9.7)에 대입하고 적분하여 처짐곡선을 불연속함수꼴로 얻는다.

(지점경계조건을 이용하여 적분상수를 구한다.)

9.5 중첩의 원리

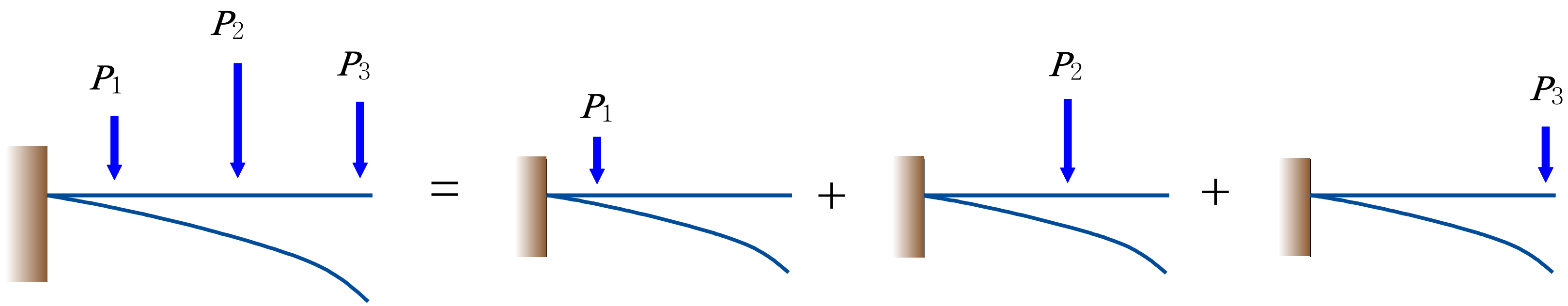


그림 9.23 중첩의 원리

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = EI_z \frac{d^2 v_1}{dx^2} + EI_z \frac{d^2 v_1}{dx^2} + EI_z \frac{d^2 v_3}{dx^2} + \cdot\cdot\cdot$$

$$= EI_z \frac{d^2}{dx^2} (v_1 + v_2 + v_3 + \cdot\cdot\cdot)$$