

---

# 디지털통신

## (Digital Communications)

Jaeshin Jang (icjoseph@inje.ac.kr)



### 디지털통신 목차

---

□ 신호 및 스펙트럼 .....	3
□ 기저대역 디지털 전송 .....	122
□ 대역통과 디지털 전송 .....	200
□ 정보이론 .....	305
□ 채널 부호화 .....	325

---

# 신호 및 스펙트럼

## 목차

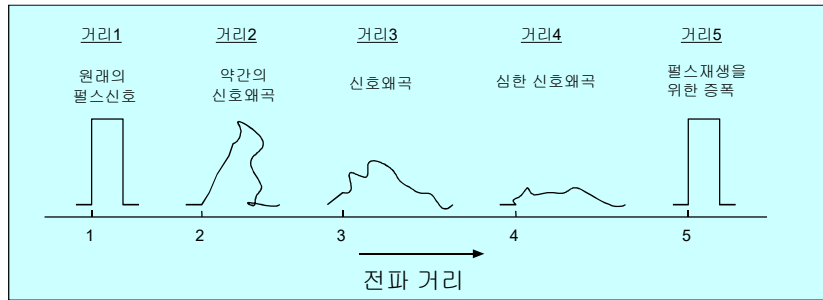
---

- 디지털통신 시스템 개요
- 신호의 분류
- 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수
- 확률변수 및 랜덤과정
- 선형 시스템을 통한 신호 전송
- 디지털 데이터의 대역폭

## 디지털통신 시스템 개요

### □ 디지털통신의 특징

- 디지털 vs. 아날로그
- 디지털신호/디지털통신 이란?



펄스의 성능저하와 재생

## 디지털통신 시스템 개요

- 디지털통신 시스템의 장점
  - 아날로그보다 쉽게 재생할 수 있음
  - 왜곡 및 간섭에 의한 영향이 적음
  - 신뢰성이 높은 통신이 가능
  - 디지털 하드웨어를 융통성 있게 구현하는 것이 가능
  - 다중화가 용이함
  - 간섭과 방해 전파로부터 원 신호 보호 가능
  - 암호화와 프라이버시가 용이
- 디지털통신 시스템의 단점
  - 넓은 대역폭 필요
  - 동기화 필요

## 디지털통신 시스템 개요

### □ 디지털통신 시스템

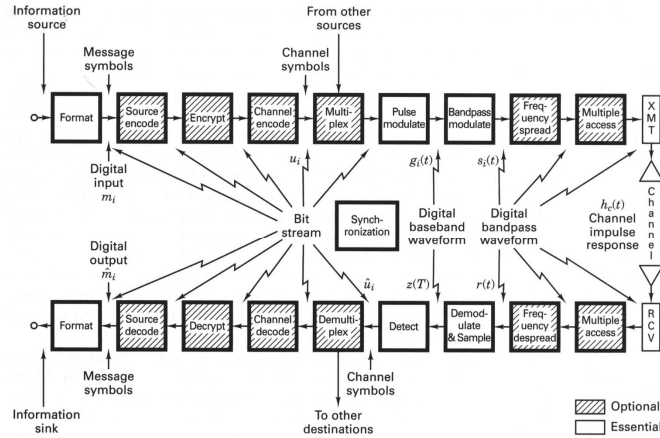


Figure 1.2 Block diagram of a typical digital communication system.

## 디지털통신 시스템 개요

### □ 신호 변환

- 상위 블록
  - : 신호원으로부터 송신기로의 신호변환
- 하위 블록
  - : 수신기로부터 싱크(sink)까지의 신호변환(역 과정)
- 무선 응용을 위한 구성
  - 송신기
    - 주파수의 상향변환
    - 전력 증폭기
    - 안테나
  - 수신기
    - 안테나
    - 저잡음 증폭기
    - 주파수의 하향변환

## 디지털통신 시스템 개요

- 형식화 (formatting)
  - 신호원 정보를 디지털 비트열로 변환
  - 정보를 디지털 통신처리에 적합한 형태로 변환
  - 기저대역 전송에 적합한 심볼을 위한 파형 선택
  
- 신호원 부호화 (source coding)
  - 불필요한 잉여 정보를 제거
  - 데이터 압축 수행

## 디지털통신 시스템 개요

- 채널 부호화 (channel coding)
  - 전송 대역폭 또는 부호기의 복잡도를 증가시키면서 오류확률 또는 신호 대 잡음비를 줄이는 역할
  - 오류 정정 등을 통한 성능 향상
  - 기본 유형
    - 구조화된 시퀀스 (structured sequence)
      - 자동 재전송 요구(ARQ): 컴퓨터통신 또는 데이터네트워크
      - 순방향 오류 정정(FEC): 이 교과목에서 다룸

## 디지털통신 시스템 개요

- 변조 (modulation)
  - 심볼을 파형으로 전환
  - 기저대역 변조
  - 대역통과 변조
- 복조 (demodulation)
  - 파형의 복원(기저대역 펄스)
  - 2개의 기본적인 유형
    - 동기(coherent) : 위상 정보 포함
    - 비동기(noncoherent) : 위상 정보 사용 안함
- 검출 (detection)
  - 메시지 심볼 추정 값으로 변환

## 디지털통신 시스템 개요

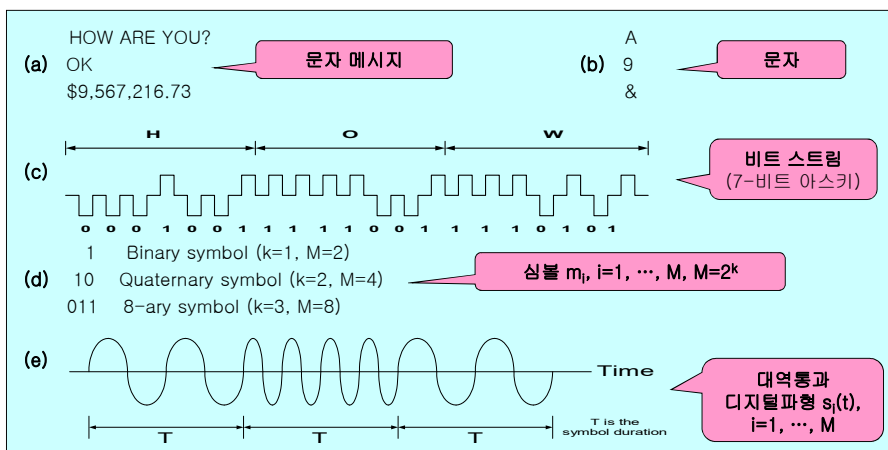
- 다중화와 다원접속 (multiplexing & multiple access)
  - 다른 특성을 가진 다양한 정보원에서 발생한 신호들을 결합하여 통신자원의 일부를 공유
  - 다중화 : **국부적**으로 일어남
  - 다원접속 : **멀리 떨어져** 일어남
- 확산 (spreading) → **이동통신공학**에서 강의
  - 간섭 및 Jamming의 영향을 줄일 수 있음
  - 비화 통신이 가능

## 디지털통신 시스템 개요

- 암호화 (encryption)
  - 프라이버시 (privacy)
  - 인증 (authentication)
  
- 동기화 (synchronization)
  - 주파수 동기 (frequency synchronization)
    - 동기 (coherent) 시스템
    - 비동기 (noncoherent) 시스템
  - 시간 동기(time synchronization)
    - 비트 동기
    - 바이트 동기
    - 프레임(메시지) 동기

## 디지털통신 시스템 개요

### □ 기본적인 디지털 통신 용어



### 용어 예

## 디지털통신 시스템 개요

### Messages, Characters, Bit, and Symbols

$$M = 2^k$$

- M: Symbol set size
- k: bits size
- k=1: binary
- k=2: quaternary or 4-ary
- k=3: 8-ary
- k=4: 16-ary

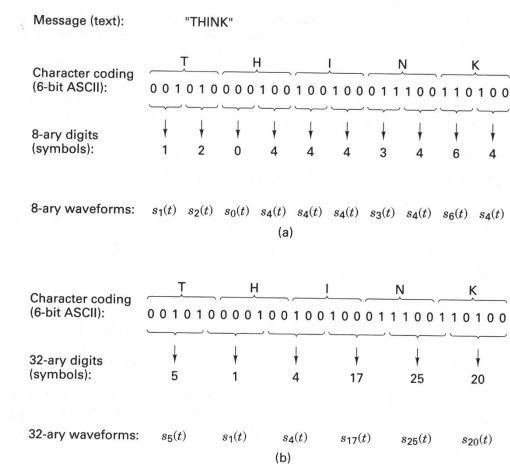


Figure 2.5 Messages, characters, and symbols. (a) 8-ary example. (b) 32-ary example.

## 디지털통신 시스템 개요

- 정보원 (information source)
  - 디지털 통신 시스템에서 교환되는 정보를 생산하는 장치
  - 아날로그 정보원 → 표본화 → 양자화 → 디지털 정보원
- 문자 메시지 (texture message)
  - 문자 열
- 문자 (character)
  - 알파벳이나 심볼 집합의 원소
  - 표준화된 부호 : 문자를 2진수의 열로써 부호화
    - 예) ASCII, EBCDIC, Hollerith, Baudot, Murray, Morse
- 비트 (bit)
  - 디지털 시스템의 기본 정보 단위
- 비트 열 (bit stream)
  - 2진수(0, 1)의 열



## 디지털통신 시스템 개요

- 심볼 (symbol)
  - $k$  비트를 하나의 단위로 하는 그룹 (특히 변조 시)
  - 알파벳의 크기 :  $M = 2^k$   
( $k$ : 심볼을 이루는 비트의 수)

- 디지털 파형 (digital waveform)
  - 디지털 심볼을 표현하는 전압 또는 전류 파형
    - 기저대역 펄스 : 진폭, 폭, 위치
    - 대역통과 파형 : 진폭, 주파수, 위상

- 데이터 율 (data rate)

Symbol rate = baud rate

$$R = \frac{k}{T} = \frac{1}{T} \log_2 M \quad (\text{bits/s}) \qquad \frac{1}{T} = \frac{R}{k}$$

( $k = \log_2 M$  심볼당 비트 수,  $T$  : 심볼 지속시간)

## 디지털통신 시스템 개요

### □ 디지털 대 아날로그 성능 평가기준

- 아날로그 통신 시스템 성능
  - 충실도 (fidelity)
    - 신호 대 잡음 비 (signal-to-noise ratio) : SNR or SIR
    - 퍼센트 왜곡 (percent distortion)
    - 송신 파형과 수신 파형 간의 평균 제곱 오류 (mean-square error)
- 디지털 통신 시스템 성능
  - 오류 확률 (error probability)
    - 비트 오류 확률
    - 바이트 오류 확률
    - 패킷 오류 확률

## 신호의 분류

### □ 결정 신호와 불규칙 신호

- 결정 신호 (deterministic signal)
  - 신호가 발생하기 전에 미리 그 신호 값을 알 수 있는 신호
  - 명확한 수학적 표현 가능
- 예)  $x(t) = 5 \cos 10t$
- 불규칙 신호 (*random* signal)
  - 신호가 실제로 발생하기 전에는 그 신호를 전혀 예측할 수 없는 신호
  - 명확한 수학적 표현 불가능
  - 여러 주기 동안 관찰해보면 확률이나 통계적 평균 등으로 추정 가능

예)  $x(t) = 5 \cos(10t + \theta)$   
 $\theta$  는  $[0, 2\pi]$  에서 불규칙

## 신호의 분류

### □ 주기 신호와 비주기 신호

- 주기 신호 (periodic signal)

예)  $x(t) = x(t + T_0)$  ,  $-\infty < t < \infty$       $T_0$  : 주기

$$x(t) = \sin \omega t \quad , \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

- 푸리에 급수 (Fourier series)
- Parseval의 전력 정리

## 신호의 분류

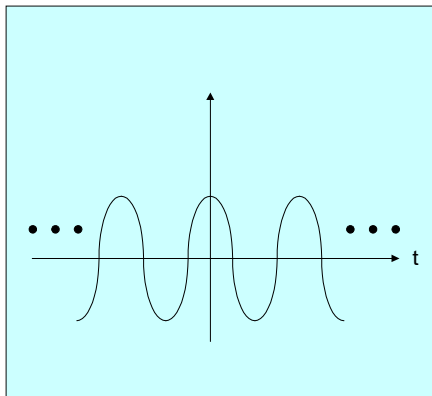
- 비주기 신호 (nonperiodic signal)

$$\text{예) } x(t) = \begin{cases} A(1 - e^{-at}) & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

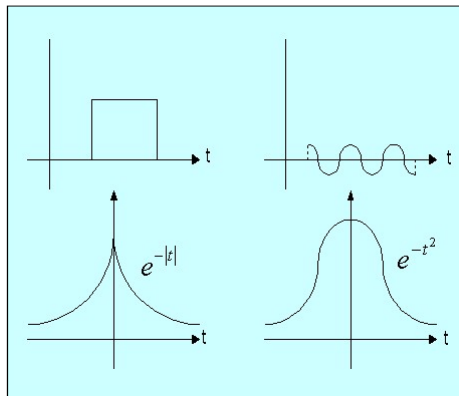
- 푸리에 변환 (Fourier transform)
- Parseval의 에너지 정리

## 신호의 분류

주기 신호



비주기 신호



주기 신호와 비주기 신호

## 신호의 분류

### □ 아날로그 신호와 이산 신호

- 아날로그 신호 (연속신호)

- 시간에 대한 연속 함수

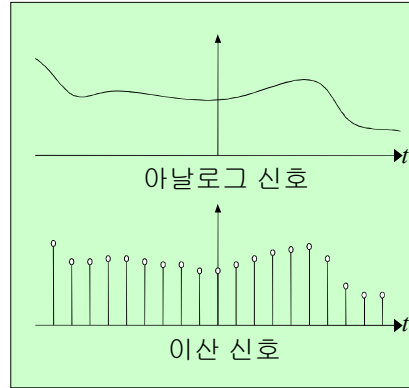
예)  $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

- 이산 신호 (discrete signal)

- 이산 시간에만 값이 존재

예)  $x(kT) = A \cdot \cos(2\pi f_0 kT)$

( $k$ : 정수,  $T$ : 고정된 시간간격)



## 신호의 분류

- 에너지 신호 (energy signal)

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

$$0 < E_x < \infty, \quad P_x = 0$$

- 유한한 에너지
- 평균전력 = 0

- 전력 신호 (power signal)

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

$$0 < P_x < \infty, \quad E_x = \infty$$

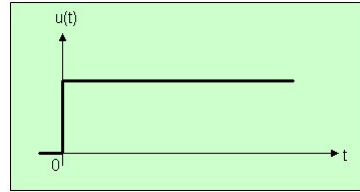
- 유한한 평균 전력
- 무한한 에너지

## 신호의 분류

### □ 유용한 함수

- 단위 계단 함수 (step function)

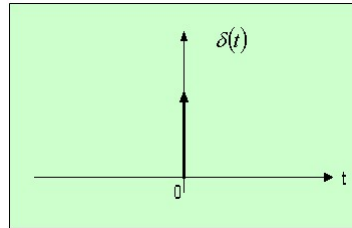
$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



- 단위 임펄스 함수 (impulse function)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty, & t = 0 \end{cases}$$



## 신호의 분류

### □ 단위 계단 함수와 단위 임펄스 함수

$$U(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} U_{\Delta}(t)$$

$$\therefore \delta_{\Delta}(t) = \frac{dU_{\Delta}(t)}{dt}$$

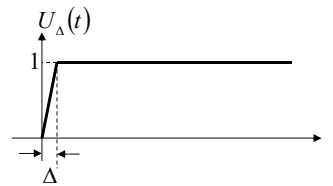
$t=0$  에서, 불연속이면서 미분불가

$$U(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\therefore \delta(t) = \frac{dU(t)}{dt}$$

$\Delta \rightarrow 0$ , 폭  $\rightarrow 0$ , 진폭  $\rightarrow \infty$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$



## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

□ 주기 신호와 푸리에 급수 (Fourier series)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

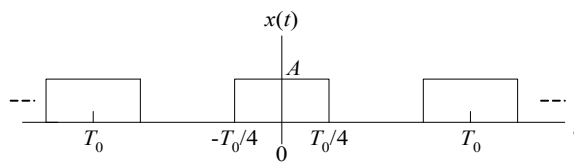
여기서,  $\omega_0$ : 기본 각 주파수  $\left(T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$

▪ 푸리에 계수

$$F_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

예)

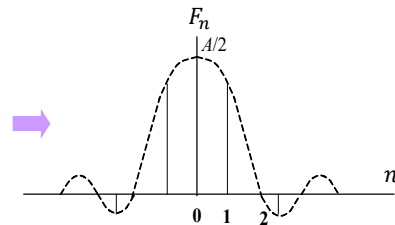


푸리에 계수

$$F_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} A e^{-jn\omega_0 t} dt$$

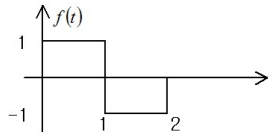
$$= \frac{A}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} = \frac{A}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

여기서,  $\text{sinc}(X) = \frac{\sin \pi X}{\pi X}$



## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

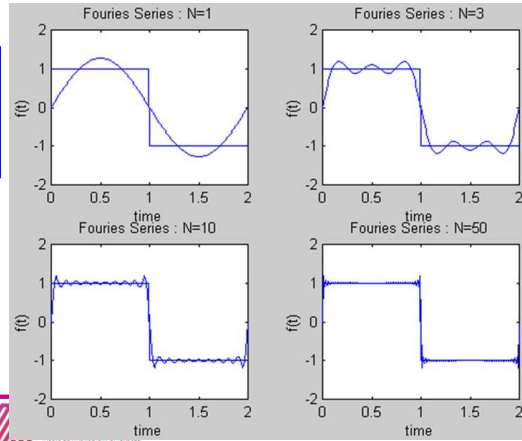
Example: **Fourier series** convergence



$$\therefore f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots \right) \text{ over the interval } (0,2).$$

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t]$$

- <예제: c202.m 참조>
- <예제: c203.m 참조>



## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

비주기 신호와 푸리에 변환 (**Fourier transform**)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

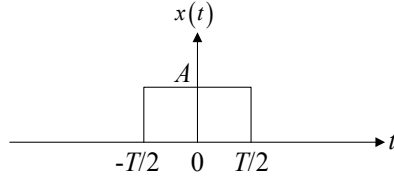
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

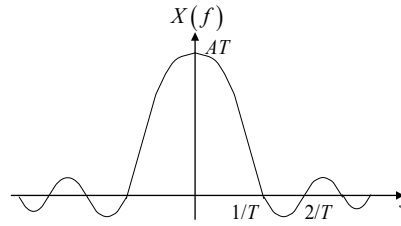
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

• 예)



$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= AT \frac{\sin \pi Tf}{\pi Tf} \\ &= AT \operatorname{sinc}(Tf) \end{aligned}$$



• <예제: c203.m 참조>

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

### □ 푸리에 변환 성질

- 선형성 (linearity)  $ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$
- 시간 이동 (time delay)  $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi ft_0} X(f)$
- 주파수 이동 (frequency translation)  $e^{j2\pi ft_0} x(t) \leftrightarrow X(f - f_0)$
- 비례성 (scaling)  $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$
- 컨볼루션(convolution)  $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$
- 곱셈 (multiplication)  $x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$



## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- 주기신호에 대한 Parseval의 전력 정리

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

- 비주기신호에 대한 Parseval의 에너지 정리

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- 스펙트럼 밀도 함수 (spectral density function)

- 주파수 영역에서 신호의 **에너지**와 **전력 분포**를 나타냄
- 통신 시스템에서 필터링과 관련하여 특히 중요
- **전력밀도함수**(Power Spectral Density)와 **에너지밀도함수**  
(Energy Spectral Density)

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- Energy density function (or Energy spectral density)

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df$$

- Power density function (or Power spectral density)

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_f(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G_f(f) df$$

$$G_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad G_f = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- 에너지 밀도 함수 (energy spectral density)

- $x(t)$  의 총 에너지

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

<증명>

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* e^{-j2\pi ft} df \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)^* X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

예)  $x(t) = \exp(-a|t|)$  ,  $a > 0$

- 시간영역

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{2at} dt + \int_0^{\infty} e^{-2at} dt \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a} \text{ (joules)} \end{aligned}$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- 주파수 영역

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \right|^2 d\omega \\ &= \frac{2}{\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{a} \text{ (joules)} \end{aligned}$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- ESD (에너지 밀도 함수)
  - 단위 대역폭당 신호 에너지

$$\Psi_X(f) = |X(f)|^2 \quad (\text{joules / Hz})$$

$$\therefore E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_X(f) df$$

- 실제 신호에서,  $\Psi_X$ 는 우함수

$$E_x = 2 \int_0^{\infty} \Psi_X(f) df$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- 전력 밀도 함수(power spectral density)
  - 주기신호  $x(t)$ 의 평균전력 ( $T_0$  구간)

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

$$F_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad : \text{푸리에 계수}$$

- PSD (전력 밀도 함수)

$$G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- 비주기 신호의 전력 밀도 함수

$$G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |X_T(f)|^2 df$$

예)  $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$  의 평균 전력

a) 시간영역

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \cos^2 2\pi f_0 t dt = \frac{A^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (1 + \cos 4\pi f_0 t) dt \\ &= \frac{A^2}{2T_0} \cdot (T_0) = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

b) 주파수 영역

$$G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{2T_0} \int_0^{T_0} (e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \begin{cases} A/2, & \text{when } n = 1 \\ A/2, & \text{when } n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$G_x(f) = \left(\frac{A}{2}\right)^2 \delta(f - f_0) + \left(\frac{A}{2}\right)^2 \delta(f + f_0)$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \frac{A^2}{2}$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

### □ 에너지 신호의 자기상관함수 (autocorrelation function)

- 자기상관
  - 한 신호와 그 신호를  $\tau$  만큼 시간 지연시킨 신호를 매칭시키는 과정
- 에너지 신호의 자기상관함수

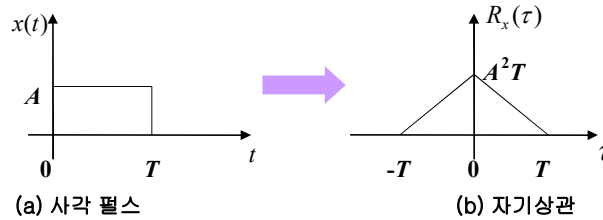
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t - \tau) dt$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- 에너지 신호의 자기상관 함수 성질

- (1)  $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$
- (2)  $R_x(\tau) \leq R_x(0)$
- (3)  $R_x(\tau) \leftrightarrow \Psi_x(f)$
- (4)  $R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$

예)



## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

### □ 주기신호의 자기상관함수

- 전력 신호의 자기상관 함수

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t+\tau) dt, \quad -\infty < T < \infty$$

- $x(t)$ 가  $T_0$ 주기를 갖는 경우

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot x(t+\tau) dt$$

## 스펙트럼 밀도 함수와 자기상관 함수

- 전력 신호의 자기상관 함수 성질

- (1)  $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$  : 우함수
- (2)  $R_x(\tau) \leq R_x(0)$  : 원점에서 최대값
- (3)  $R_x(\tau) \leftrightarrow G_x(f)$  : 푸리에 변환쌍
- (4)  $R_x(0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt$  : 평균전력

예)  $x(t) = \sqrt{2} \cos(\omega_0 t + \theta)$  의 자기상관함수

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2 \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_0 \tau dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta) dt \\ &= \cos \omega_0 \tau \end{aligned}$$

## 확률변수 및 랜덤과정

### □ 확률

- 확률 공간 (probability space)
  - $\Omega$  : 표본 공간 (sample space)
  - $F$  :  $\Omega$ 의 부분공간의 집합
  - $P$  : 확률  $\rightarrow P: \Omega \rightarrow R[0,1]$
  
- 성질
  - i)  $0 \leq P(A) \leq 1, \quad A \in F$
  - ii)  $P(\Omega) = 1$
  - iii) 만약  $A, B \in F$  이고,  $A \cap B = \phi$  일 때,  

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

## 확률변수 및 랜덤과정

- 조건부 확률 (conditional probability)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- 전체 확률 (total probability)

$A_1, A_2, \dots, A_n$ : 상호 배반 (mutually exclusive) 사건

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \phi, \quad \text{for } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$



## 확률변수 및 랜덤과정

- Bayes 정리 (Bayes' theorem)

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)}$$

- 독립 사건 (independent event)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

## Example

- 항아리 속에 10개의 제비가 들어있다. 이 중 3개가 당첨 제비이다. 첫 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률과 두 번째 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률을 구하라.

A: 첫 번째 사람이 당첨 제비를 뽑을 사건

B: 두 번째 사람이 당첨 제비를 뽑을 사건

## Difference between Total probability & Bayes' rule

- Example1 : 세 개의 항아리에 흰 공과 검은 공이 섞여 있다. 각 항아리에 있는 공들은 구분이 가능하다. 이 공들을 모두 섞은 후 임의로 공 한 개를 선택하였다.
  - 흰 공을 선택할 확률은?
  - 선택한 공이 흰 공일 경우 이 공이 항아리 1에 있던 공일 확률은?
  
- Example2 : 어떤 제품을 생산하는 3개의 공장이 있다.
  - A공장 : 50% 생산, 5% 불량품
  - B공장 : 30% 생산, 10% 불량품
  - C공장 : 20% 생산, 15% 불량품
  - 1) 한 제품을 임의로 선택했을 때 이것이 불량품일 확률은?
  - 2) 선택한 제품이 불량품이라는 가정하에서 해당 불량품을 A공장에서 생산했을 확률은?

## SOLUTION:

$A/B/C \equiv A/B/C$  공장이 선택될 사건

$D \equiv$  선택한 제품이 불량품일 사건

Solution of (1)

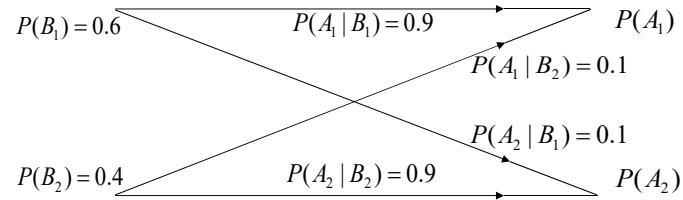
$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ = 0.05 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.15 \cdot 0.2 = 0.085$$

Solution of (2)

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.085} = 0.75$$

## 확률변수 및 랜덤과정

예) 2진 대칭 채널 (BSC: binary symmetric channel)



$$\begin{aligned} \rightarrow P(A_1) &= P(A_1 | B_1)P(B_1) + P(A_1 | B_2)P(B_2) = 0.58 \\ P(A_2) &= P(A_2 | B_1)P(B_1) + P(A_2 | B_2)P(B_2) = 0.42 \end{aligned}$$

## 확률변수 및 랜덤과정

$$\begin{aligned} \rightarrow P(B_1 | A_1) &= \frac{P(A_1 | B_1)P(B_1)}{P(A_1)} \cong 0.931 \\ P(B_2 | A_2) &= \frac{P(A_2 | B_2)P(B_2)}{P(A_2)} \cong 0.857 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(B_1 | A_2) &= \frac{P(A_2 | B_1)P(B_1)}{P(A_2)} \cong 0.143 \\ P(B_2 | A_1) &= \frac{P(A_1 | B_2)P(B_2)}{P(A_1)} \cong 0.069 \end{aligned}$$

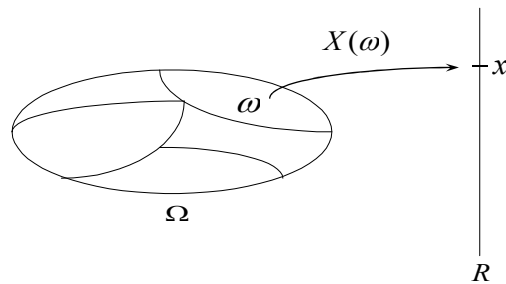
## 확률변수 및 랜덤과정

### □ 확률변수 (random variable)

- $X(\omega)$ : 불규칙 사건  $\omega$  과 실수간의 함수적 관계

사상 : 사건  $\omega \rightarrow$  실수  $R$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in F, x \in R$$



## 확률변수 및 랜덤과정

- 연속확률변수 (Continuous random variable)
  - 확률 분포 함수 (distribution function) : CDF

$$F_X(x) \equiv P(X \leq x)$$

- 특성

i)  $0 \leq F_X(x) \leq 1$

ii)  $F_X(-\infty) = 0, F_X(+\infty) = 1$

iii)  $x_1 < x_2$  이면,  $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

iv)  $P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1)$

$$= F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

## 확률변수 및 랜덤과정

- 확률 밀도 함수 (probability density function) : PDF

$$f_X(x) \equiv \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- 특성

$$i) f_X(x) \geq 0$$

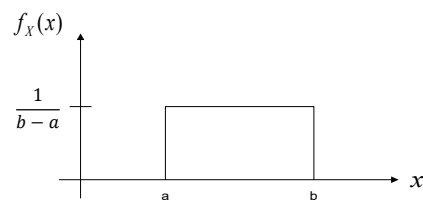
$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1$$

$$iii) P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

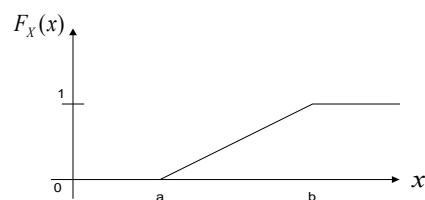
$$iv) F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

## 확률변수 및 랜덤과정

예) (1) 균일 밀도 함수 (uniform density function)



$$* F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

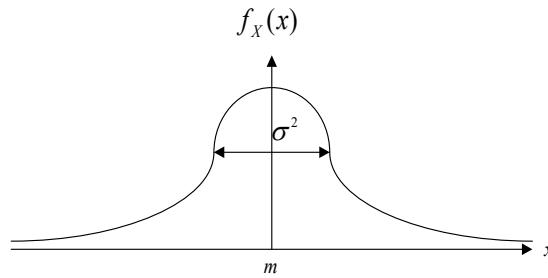


## 확률변수 및 랜덤과정

(2) 가우시안 밀도 함수 (Gaussian density function)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

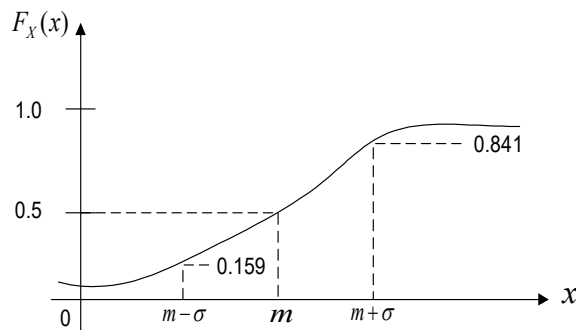
$m$  = 평균,  $\sigma^2$  = 분산



## 확률변수 및 랜덤과정

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

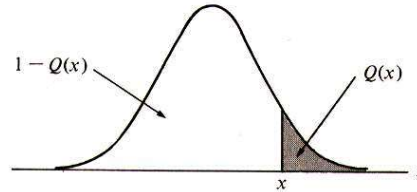
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right] du$$



## 확률변수 및 랜덤과정

- Q-function 정의

$$Q(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2/2} dz$$



- CDF를 Q-function으로 표시하기

$$P(X \leq (m + k\sigma)) = \int_{-\infty}^{m+k\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx$$

$$\text{Put } z = \frac{(x-m)}{\sigma} \mapsto \sigma dz = dx, m+k\sigma \rightarrow k; -\infty \rightarrow -\infty$$

$$P(X \leq (m + k\sigma)) = \int_{-\infty}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 1 - Q(k)$$

## 확률변수 및 랜덤과정

### □ Example

- The amplitude of a signal is Gaussian-distributed with zero mean and a mean-square value  $\sigma^2$ . Find the probability of observing the signal amplitude above  $3\sigma$ .

- Solution

$$P(X > 3\sigma)?$$

$$P(X > 3\sigma) = \int_{3\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx$$

$$\text{Put } z = \frac{x}{\sigma} \mapsto \sigma dz = dx; 3\sigma \rightarrow 3; \infty \rightarrow \infty$$

$$\therefore P(X > 3\sigma) = \int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = Q(3) \approx 0.0013$$

### 확률변수 및 랜덤과정

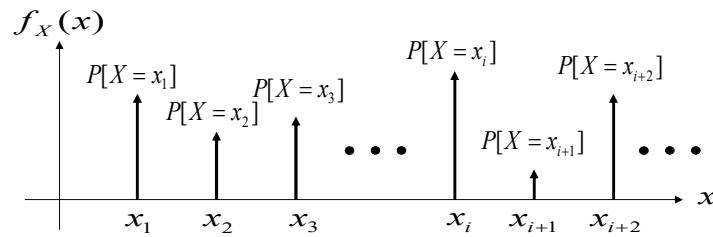
- 이산 확률 변수 (discrete random variable)

- 확률 질량 함수 (probability mass function)

$$P_X(x) = P[X = x_i]$$

- 확률 밀도 함수 (probability density function)

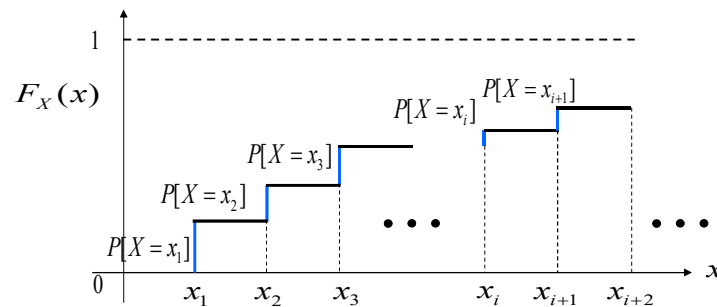
$$f_X(x) = \sum_{i=1}^n P[X = x_i] \delta(x - x_i)$$



### 확률변수 및 랜덤과정

- 분포 함수

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^n P[X = x_i] u(x - x_i)$$





## 확률변수 및 랜덤과정

- 결합 분포 함수 (joint distribution function)

$$F_{XY}(x, y) = P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] = P[X \leq x, Y \leq y]$$

- 특성

$$i) F_{XY}(x, \infty) = F_X(x), \quad F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y) : \text{Marginal distribution}$$

$$ii) F_{XY}(\infty, \infty) = 1, \\ F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = F_{XY}(-\infty, -\infty) = 0$$

$$iii) P[(x_1 < X \leq x_2) \cap (y_1 < Y \leq y_2)] \\ = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$$

## 확률변수 및 랜덤과정

- 결합 밀도 함수 (joint density function)

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- 특성

$$i) f_{XY}(x, y) \geq 0$$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

iii) Marginal density function

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

$$iv) P[(x_1 < X \leq x_2) \cap (y_1 < Y \leq y_2)] = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{XY}(x, y) dx dy$$

## 확률변수 및 랜덤과정

- 평균 (expectation)  $m_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$   

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P[X = x]$$

- n차 모멘트 (nth moment)  $E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x) dx$   

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^n \cdot P[X = x]$$

- n차 중앙 모멘트 (nth central moment)  

$$E\{(X - m_X)^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^n f_X(x) dx$$
  

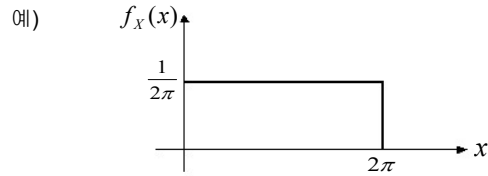
$$= \sum_{x=0}^{\infty} (x - m_X)^n \cdot P[X = x]$$

## 확률변수 및 랜덤과정

- 분산 (variance : 2nd central moment)

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E\{(X - m_X)^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx \\ &= E\{X^2 - 2m_X \cdot X + m_X^2\} \\ &= E\{X^2\} - 2m_X \cdot E\{X\} + m_X^2 \\ &= E\{X^2\} - m_X^2 \end{aligned}$$

## 확률변수 및 랜덤과정



풀이)  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} x dx = \pi$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} x^2 dx = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$\text{var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{4}{3} \pi^2 - \pi^2 = \frac{1}{3} \pi^2$$

$$E[\cos X] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x f_X(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos x dx = 0$$

$$E[(X - \pi)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \pi)^2 f_X(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

## 확률변수 및 랜덤과정

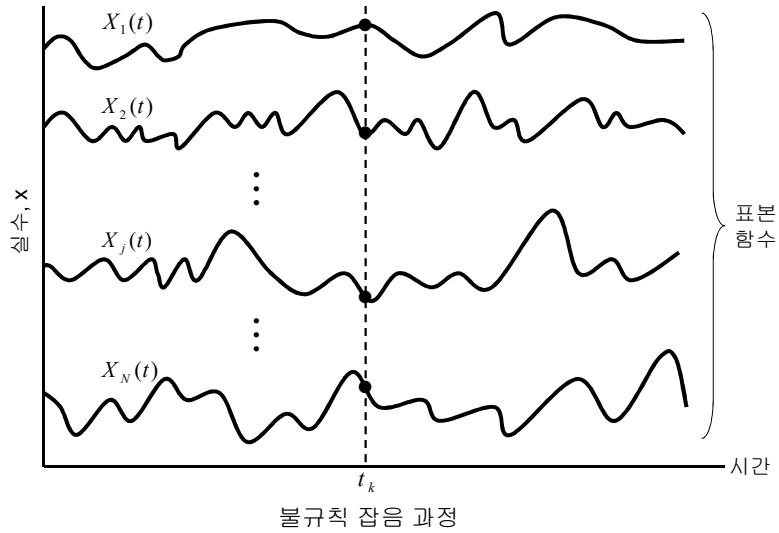
### □ 랜덤과정 (random process)

- A function of two variables

$$X(A, t), \quad A: \text{event}, \quad t: \text{time}$$

- 확률변수 (random variable)
  - 특정 시간  $t_k$  에 대하여
- 표본 함수 (sample function)
  - 특정 사건  $A_j$  에 대하여
  - → 단일 시간 함수
- 앙상블 (ensemble)
  - 모든 표본 함수들의 집합

### 확률변수 및 랜덤과정



### 확률변수 및 랜덤과정

□ 통계적 평균 (statistical average)

- 랜덤과정의 평균

$$E\{X(t_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X_k}(x) dx = m_X(t_k)$$

$X(t_k)$  :  $t_k$  에서 확률 변수 ,  $f_{X_k}(x)$  :  $X(t_k)$ 의 pdf

- 랜덤과정의 자기상관함수

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$$

## 확률변수 및 랜덤과정

### □ 정상 과정 (stationary process)

- 엄격한 의미에서의 정상과정 (strict-sense stationary)

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

모든  $i$  에 대하여  $(t_i + \tau) \in T$

- 넓은 의미에서의 정상과정 (wide-sense stationary)

$$(1) E[X_t] = C, \quad C \text{ 는 상수}$$

$$(2) R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$$

## 확률변수 및 랜덤과정

예) a)  $X(t) = at + b$      $b$ : 상수

$$f_a(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$E\{X(t)\} = E\{at + b\} = b : \text{상수}$$

$$\therefore E\{a\} = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$$

$$= E\{(at_1 + b)(at_2 + b)\}$$

$$= E\{a^2 t_1 t_2 + ab(t_1 + t_2) + b^2\}$$

$$= t_1 t_2 E\{a^2\} + b(t_1 + t_2)E\{a\} + b^2$$

$$= t_1 t_2 + b^2 \rightarrow t \text{의 함수}$$

$$\therefore E\{a^2\} = 1$$

$$\therefore X(t) \text{는 W.S.S.가 아님}$$

## 확률변수 및 랜덤과정

$$b) \quad X(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$A, \omega$  : 상수

$\theta$  :  $[0, 2\pi]$  에서 균일밀도

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A \cdot \cos(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= E[A \cdot \cos(\omega t + \theta) \cdot A \cdot \cos(\omega t + \omega\tau + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cdot E[\cos \omega\tau + \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau + \frac{A^2}{2} E[\cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cdot \cos \omega\tau \end{aligned}$$

$\therefore X(t)$ 는 W.S.S.

## 확률변수 및 랜덤과정

### □ W.S.S. 랜덤과정의 자기상관함수

- 분산 : 랜덤변수에 대한 불규칙 정도의 측정 기준
- 자기상관함수 : 랜덤과정에 대한 유사한 정도의 측정 기준

#### ▪ 자기상관함수

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} \quad , \quad -\infty < \tau < \infty$$

## 확률변수 및 랜덤과정

- 특성

(1)  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$  : 대칭성

(2)  $R_X(\tau) \leq R_X(0)$  : 원점에서 최대값

(3)  $R_X(\tau) \leftrightarrow G_X(f)$  : 푸리에 변환쌍

(4)  $R_X(0) = E\{X^2(t)\}$  : 원점에서의 값은 평균신호전력

## 확률변수 및 랜덤과정

- 시간 평균과 에르고딕성

- 에르고딕 (ergodic) 과정
  - 시간 평균 = 앙상블 평균

- 에르고딕 조건

1)  $m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt$

2)  $R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \cdot X(t + \tau) dt$

## 확률변수 및 랜덤과정

- 기본적인 전자/정보통신공학에서의 매개변수와 에르고딕 랜덤과정

- (1)  $m_X = E\{X(t)\}$ : 신호의 직류값
- (2)  $m_X^2$ : 직류성분의 평균 전력
- (3)  $E\{X^2(t)\}$ : 전체 평균 전력
- (4)  $\sqrt{E\{X^2(t)\}}$ : 전압 또는 전류 신호의 r.m.s.
- (5)  $\sigma_X^2$ : 교류 성분의 평균 전력
- (6) 만약  $m_X = 0 \rightarrow \sigma_X^2 = E\{X^2\}$

## 확률변수 및 랜덤과정

### □ 랜덤과정의 전력스펙트럼밀도

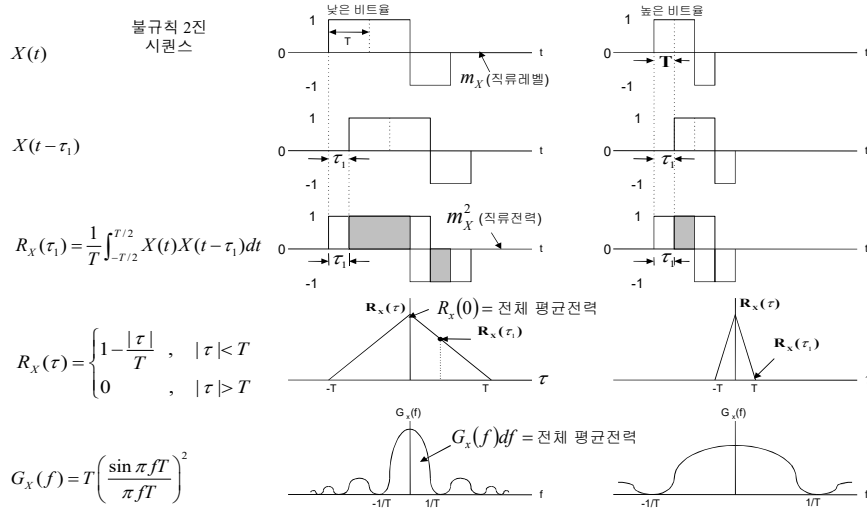
- 주요 특성

- (1)  $G_X(f) \geq 0$
- (2)  $G_X(f) = G_X(-f)$
- (3)  $G_X(f) \leftrightarrow R_X(\tau)$
- (4)  $P_X = \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f) df$



## 확률변수 및 랜덤과정

### ■ 자기상관함수와 전력스펙트럼밀도



## 확률변수 및 랜덤과정

### □ 통신시스템에서의 잡음

- 잡음 (noise)
  - 전기 시스템에서 언제나 존재하는 원하지 않은 전기 신호
- 잡음원
  - 인공적인 잡음 : 양자화 잡음, 각종 전자기기에 의한 잡음 등
  - 자연적인 잡음 : 열잡음 등
- 잡음 제거
  - 필터링 (filtering)
  - 차폐 (shielding)
  - 효율적인 변조 방식의 선택 : 대역확산 방식 등

## 확률변수 및 랜덤과정

- 가우시안 (Gaussian) 랜덤과정
  - 열잡음 (thermal noise) : 평균이 0인 가우시안 랜덤과정
  - 가우시안 확률밀도함수

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right]$$

- 불규칙 신호 ( $z$ )

$$z = a + n$$

$a$  : 직류 신호,  $n$  : 가우시안 잡음

- $z$ 의 확률밀도함수

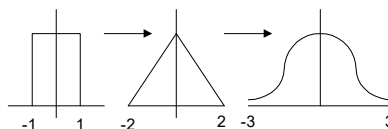
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)^2\right]$$

## 확률변수 및 랜덤과정

- 중심 극한 정리 (central limit theorem)
  - $j$  개의 통계적 독립 변수의 합의 확률 분포는  $j \rightarrow \infty$  일 때 가우시안 분포에 근접

$$\rightarrow Y = \sum_{i=1}^j X_i$$

$$\therefore f_Y(y) = f_X(x_1) * f_X(x_2) * f_X(x_3) * \dots * f_X(x_j)$$



## 확률변수 및 랜덤과정

### □ 백색 잡음 (white noise)

- 열 잡음의 스펙트럼 특성
  - 모든 주파수에 대해 전력스펙트럼밀도가 동일
- 백색 잡음 : 잡음 전력이 균일한 스펙트럼밀도를 가질 경우

$$G_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{ [watts/hertz]}$$

- 백색 잡음의 자기상관함수

$$R_n(\tau) = F^{-1}\{G_n(f)\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

## 확률변수 및 랜덤과정

### □ 백색 잡음 (white noise): cont'd

- 주파수 스펙트럼과 Autocorrelation

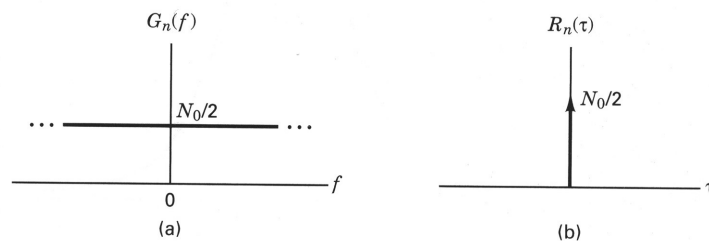
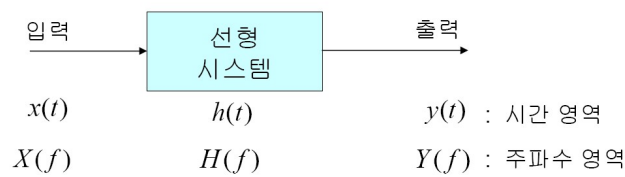


Figure 1.8 (a) Power spectral density of white noise. (b) Autocorrelation function of white noise.

## 확률변수 및 랜덤과정

- AWGN (additive white Gaussian noise)
  - 가산성
    - 잡음의 메커니즘이 곱해지는 것이 아니라 **항상 더해짐**
  - 백색
    - 잡음 전력이 균일한 스펙트럼 밀도를 가짐
    - 자기상관함수는  $\frac{N_0}{2}\delta(t)$
  - 가우시안
    - 열잡음은 가우시안 랜덤 과정
    - 잡음의 샘플들은 무상관(uncorrelated) → 서로 독립(independent)
    - AWGN 채널에서는 잡음이 전송된 심볼에 독립적으로 영향을 줌

## 선형시스템을 통한 신호 전송



- 선형성 :  $x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t)$   
 (linearity)  $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$
- 시불변성 :  $x(t) \rightarrow y(t)$   
 (time invariant)  $x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

- 인과적 (causal) :  $h(t) = 0$  for  $t < 0$

$$y(t) = x(t-1) + x(t) \quad : \text{인과적 (causal)}$$

$$y(t) = x(t) + x(t+1) \quad : \text{비인과적 (non-causal)}$$

- 안정적 (stable) :  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

- 시스템 출력 :  $y(t) = x(t) * h(t)$   
 $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

### □ 임펄스 응답 (impulse response)

- 선형 시불변 시스템은  $h(t)$  에 의해 시간영역에서 특징지어짐
- $h(t)$  는 입력이 단위 임펄스  $\delta(t)$  일 때의 응답

$$y(t) = h(t) = h(t) * \delta(t)$$

- 임의의 입력  $x(t)$ 에 대한 응답

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

- 인과적 시스템에서

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

□ 주파수 전달 함수 (transfer function)

- 시간영역에서 콘벌루션 → 주파수영역에서 곱셈

$$x(t) * h(t) \xrightarrow{F.T} X(f) \cdot H(f)$$

- 주파수 전달 함수

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}, \quad H(f) = \mathfrak{F}\{h(t)\}$$

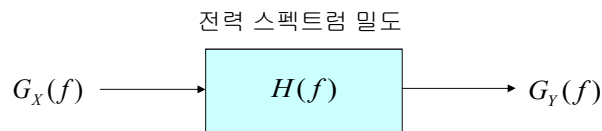
- $$H(f) = |H(f)|e^{j\theta(f)}$$

$$\theta(f) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{H(f)\}}{\text{Re}\{H(f)\}}$$

여기서,  $\theta(f)$  : 위상 응답

## 선형시스템을 통한 신호 전송

- 랜덤과정과 선형시스템
  - 선형 시불변 시스템의 입력이 랜덤과정이면 출력도 랜덤과정



$$G_Y(f) = G_X(f) \cdot |H(f)|^2$$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

증명)  $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[y(t)y(t+\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t-u_1)x(t-u_2+\tau)]h(u_1)h(u_2)du_1du_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(u_2-u_1-\tau)h(u_1)h(u_2)du_1du_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_Y(f) &= \mathfrak{F}[R_Y(\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int \int R_X(u_2-u_1-\tau)h(u_1)h(u_2)e^{-j\omega\tau} du_1du_2d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int \int R_X(u_2-u_1-\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau h(u_1)h(u_2)du_1du_2 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{F}[R_X\{\tau + (u_1 - u_2)\}] = G_X(f) \cdot e^{-j\omega(u_2-u_1)}$$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f)e^{-j\omega(u-u')}h(u)h(u')du du' \\ &= G_X(f) \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{j\omega u} du \int_{-\infty}^{\infty} h(u')e^{-j\omega u'} du' \end{aligned}$$

$$H(-f) = H(f)^*$$

$$\begin{aligned} &= G_X(f)H(f)^*H(f) \\ &= G_X(f)|H(f)|^2 \end{aligned}$$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

### □ 무왜곡 전송(distortionless transmission)

- 이상적인 무왜곡 채널에서

$$y(t) = Kx(t - t_0) \quad (K, t_0 : \text{상수})$$

→ 출력은 입력과 같은 모양

$$Y(f) = KX(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

- 무왜곡 전송을 위한 전달 함수

$$H(f) = Ke^{-j2\pi ft_0}$$

- $|H(f)| = K$  : 주파수크기의 응답은 일정
- $\theta(f) = -2\pi ft_0$  : 위상 변화는 주파수에 선형으로 비례

## 선형시스템을 통한 신호 전송

### □ 이상적인 필터 (ideal filter)

- 필터의 주파수 전달함수

$$H(f) = Ke^{-j2\pi ft_0}$$

- 무한대의 주파수 대역폭 필요
- 이러한 시스템 설계는 물리적으로 불가능
- 실제의 무왜곡 시스템 → 충분히 넓은 유한한 대역폭으로 가능
- 일반적인 필터의 대역폭 ( $W_f$ )
  - $|H(f)|$  가 일정하게 유지되는 양의 주파수들 사이의 간격



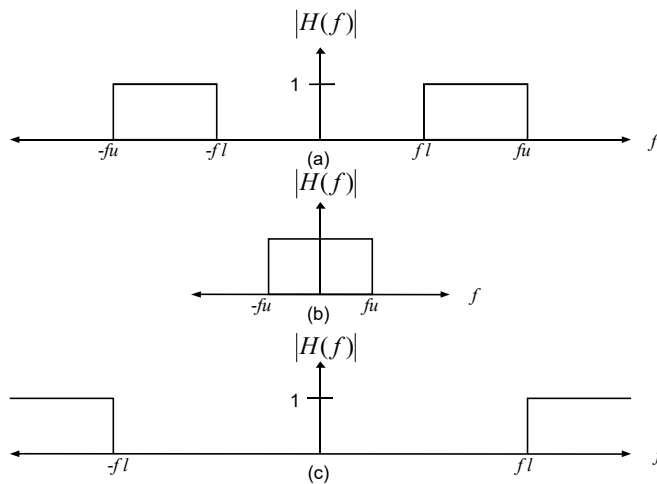
## 선형시스템을 통한 신호 전송

- 이상적인 필터로의 근사화
  - $f_l < f < f_u$  : 왜곡 없이 통과
  - 필터의 대역폭 :  $W_f = (f_u - f_l)$

여기서,  $f_l$  : 저역 차단 주파수,  $f_u$  : 고역 차단 주파수

- 이상적인 필터 종류
  - 대역통과 필터 (BPF) :  $f_l \neq 0, f_u \neq \infty$
  - 저역통과 필터 (LPF) :  $f_l = 0, f_u = \text{유한한 값}$
  - 고역통과 필터 (HPF) :  $f_l \neq 0, f_u \rightarrow \infty$

## 선형시스템을 통한 신호 전송



a) 이상적인 BPF b) 이상적인 LPF c) 이상적인 HPF

## 선형시스템을 통한 신호 전송

- 이상적인 LPF

$$H(f) = |H(f)|e^{-j\theta(f)}$$

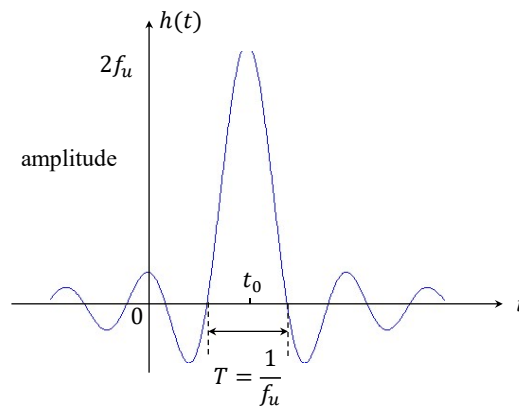
$$\text{여기서, } |H(f)| = \begin{cases} 1 & , |f| < f_u \\ 0 & , |f| \geq f_u \end{cases}$$

$$e^{-j\theta(f)} = e^{-j2\pi ft_0}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df = 2f_u \text{sinc}2f_u(t - t_0)$$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

- 이상적인 저역통과 필터의 임펄스 응답



$\therefore H(f) = |H(f)|e^{-j\theta(f)}$  인 이상적인 필터는 구현 불가능

## 선형시스템을 통한 신호 전송

□ 구현 가능한 필터 (realizable filter)

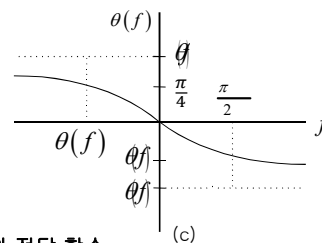
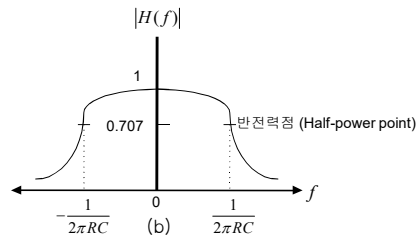
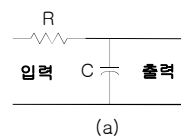
- 구현 가능한 저역통과 필터의 가장 간단한 예

→ RC필터

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} e^{j\theta(f)}$$

여기서,  $\theta(f) = -\tan^{-1} 2\pi fRC$

## 선형시스템을 통한 신호 전송



RC 필터와 전달 함수

- (a) RC 필터 (b) RC 필터의 크기 특성 (c) RC 필터의 위상 특성

## 선형시스템을 통한 신호 전송

- 반전력 주파수 (half power frequency)
  - 출력 신호 전력이 최대 전력 값의 반이 되는 점의 주파수
  - 출력 신호의 전압 크기가 최대값의  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  이 되는 점의 주파수
  
- 대역폭 ( $W_f$ )
  - 반전력점 (half-power point)

$$W_f = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{Hz}$$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

### □ 전력과 전압과의 관계

$$\text{number of dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2^2/R_2}{V_1^2/R_1}$$

For the case of 1 ohm resistance

$$\begin{aligned} \text{number of dB} &= 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2^2}{V_1^2} \\ &= 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

### □ Sound pressure level in dB

소리의 종류	dB	느낌
체트기 이륙(60 m 떨어진 곳에서)	120 dB	견디기 어렵다
공사장 소음, 헤비메탈 연주회	110 dB	
고함(1.5m 에서)	100 dB	대단히 시끄럽다
대형 트럭(15m 에서), 굴착기(1m)	90 dB	
대도시 거리 소음	80 dB	꽤 시끄럽다
자동차 실내 소음	70 dB	
보통 대화(1m 떨어져서)	60 dB	보통
교실, 사무실	50 dB	
조용한 거실	40 dB	조용하다
밤중의 침실	30 dB	
방송국 스튜디오	20 dB	고요하다
나뭇잎 스치는 소리	10 dB	
들을 수 있는 가장 작은 소리	0 dB	겨우 무엇인가 들린다

- 가청 문턱:  $10^{-12} \text{W/m}^2$
- 통증 문턱:  $10 \text{W/m}^2$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

신호 및 시스템

- 성형 계수 (shape factor)
  - 실현 가능한 필터가 이상 필터에 얼마나 근접하는가의 척도

$$\text{성형 계수} = \frac{|H(f)|_{-60\text{dB 필터 대역폭}}}{|H(f)|_{-6\text{dB 필터 대역폭}}$$

Sharp cutoff BPF : shape factor  $\approx 2$

Simple RC LPF : shape factor  $\approx 600$

## 선형시스템을 통한 신호 전송

- 버터워스 필터 (Butterworth filter)
  - 이상적인 저역통과필터에 가장 근사적인 필터

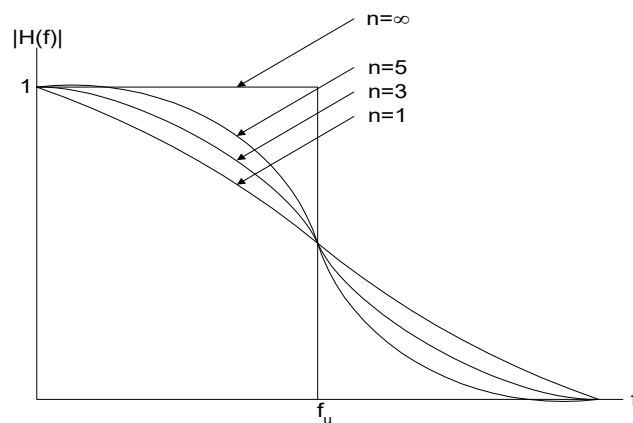
$$|H_n(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_u)^{2n}}}, \quad n \geq 1$$

여기서  $f_u$  는 상측 -3dB 차단 주파수 (cutoff frequency)

- $n$ 이 커질수록 → 크기 특성은 이상적인 필터에 근접
- 통과대역에서 주파수 응답 크기의 평탄 특성이 좋음

## 선형시스템을 통한 신호 전송

- 버터워스 필터 크기 응답



## 디지털 데이터의 대역폭

### □ 기저대역(baseband)과 대역통과(bandpass)

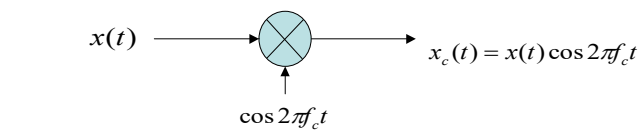
- 기저대역 신호를 더 높은 주파수로 옮김
  - 반송파를 기저대역 신호에 곱함 → 대역통과 신호
  - 기저대역 신호  $\times (\cos 2\pi f_c t)$

- 양측파대(double-sideband : DSB) 변조 신호

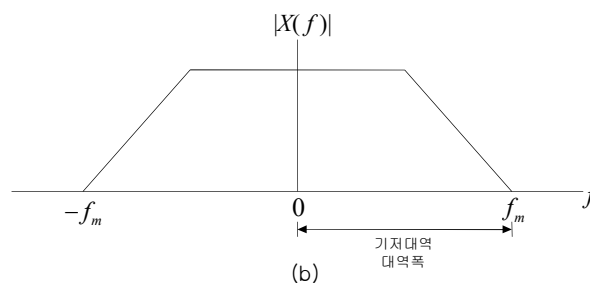
$$x_c(t) = x(t) \cos 2\pi f_c t$$

$$X_c(f) = \frac{1}{2} [X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$

## 디지털 데이터의 대역폭

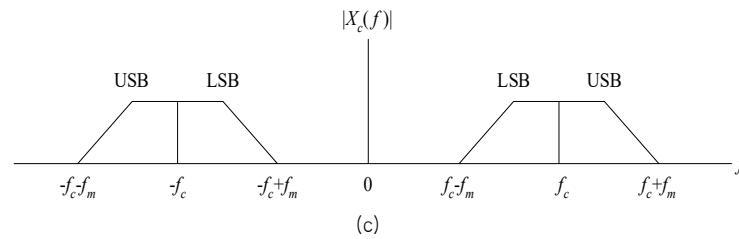


(a)



(b)

## 디지털 데이터의 대역폭



기저대역 및 통과대역 스펙트럼  
(b) 기저대역 스펙트럼 (c) 통과대역 스펙트럼

## 디지털 데이터의 대역폭

- 상측파대 (upper side band : USB) :  $f_c \sim (f_c + f_m)$
- 하측파대 (lower side band : LSB) :  $(f_c - f_m) \sim f_c$
- 기저대역 신호를 양측파대(DSB)로 전송하기 위해 필요한 대역폭 :

$$W_{DSB} = 2f_m$$

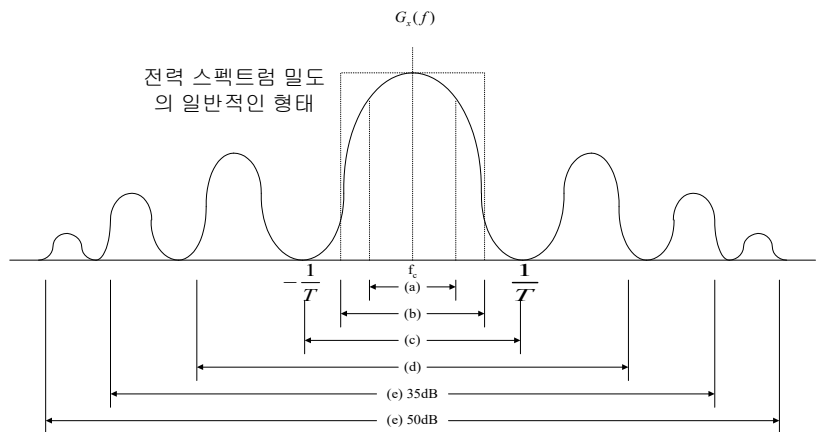


## 디지털 데이터의 대역폭

### □ 대역폭 (bandwidth) 문제

- 엄격히 대역 제한된 채널 (strictly band limited channel)
  - 정의된 대역 외부에 신호 전력이 존재하지 않음
  - 엄격히 대역제한 된 신호는 현실적으로 존재하지 않음
  - 대역폭 정의 문제 발생

## 디지털 데이터의 대역폭



디지털 데이터의 대역폭 (a) 반 전력 대역폭. (b) 잡음 등가 대역폭. (c) 널 대 널 대역폭. (d) 99% 전력 대역폭. (e) 35dB 및 50dB의 제한된 전력 스펙트럼 밀도 대역폭 (대역폭 외부의 감쇠 정도를 의미함)

## 디지털 데이터의 대역폭

- 대역폭
  - (a) 반 전력 대역폭 (half-power bandwidth)
    - $G_x(f)$ 가 반전력 (최고치의 3dB 아래)으로 감소하는 주파수 간격
  - (b) 등가 사각형 또는 잡음 등가 대역폭 (equivalent rectangular or noise equivalent bandwidth)

- 잡음 등가 대역폭

$$W_N = \frac{P_X}{G_X(f_c)}$$

여기서  $P_X$  : 전체 주파수 영역에 대한 신호 총 전력

$G_X(f_c)$  :  $G_X(f)$ 의 최대값

## 디지털 데이터의 대역폭

- (c) 널 대 널 대역폭 (null-to-null bandwidth)
  - 디지털 통신에서 대역폭 척도로 가장 널리 쓰임
  - 메인 로브의 폭 : 대부분의 신호 전력을 포함
- (d) 부 전력 대역폭 (fractional power containment bandwidth)
  - 미연방 통신 위원회 (federal communications commission)에서 채택
  - 신호 전력의 99%가 존재하는 대역폭
- (e) 제한된 전력 스펙트럼 밀도 (bounded power spectral density)
  - 전력 스펙트럼 밀도  $G_x(f)$ 가 최대값에 대해 지정된 레벨 (35 or 50dB) 이하로 감소되는 주파수 지정 간격

## 디지털 데이터의 대역폭

- (f) 절대 대역폭 (absolute bandwidth)
  - 이 대역 외부에서는 전력 스펙트럼이 0 이 됨

ex) 엄격히 대역제한 된 신호 존재유무

$X(f)$  : 엄격히 대역제한 된 신호  $x(t)$  의 푸리에 변환

중심 주파수 :  $\pm f_c$ , 대역폭 :  $2W$  를 가정

## 디지털 데이터의 대역폭

- $X(f)$  를 이상 필터 전달 함수 형태로 표현

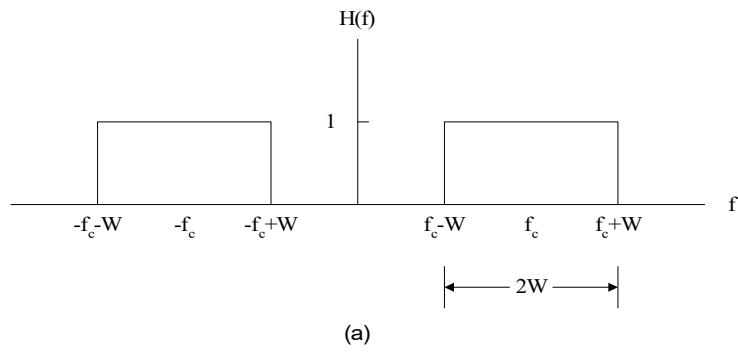
$$X(f) = X'(f) \cdot H(f)$$

여기서  $X'(f)$  : 대역 제한된 신호는 아님

- $H(f) = \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{2W}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{2W}\right)$

$$\text{여기서, } \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right) = \begin{cases} 1 & , -W < f < W \\ 0 & , |f| > W \end{cases}$$

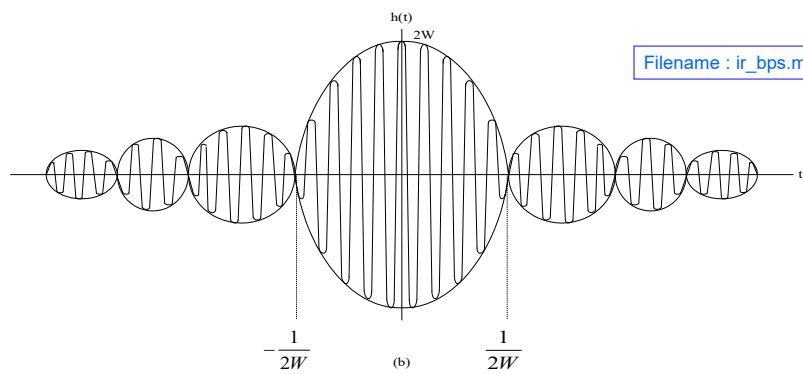
## 디지털 데이터의 대역폭



엄격히 대역 제한된 신호에서의 전달함수와 임펄스 응답

(a) 이상적인 대역통과 필터 전달 함수

## 디지털 데이터의 대역폭



(b) 이상적인 대역통과 필터 임펄스 응답

## 디지털 데이터의 대역폭

$$X(f) = \begin{cases} X'(f), & (f_c - W) \leq |f| \leq (f_c + W) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h(t) = 2W(\text{sinc } 2Wt) \cos 2\pi f_c t \quad \leftarrow \text{MATLAB으로 그려볼 것!}$$

-  $h(t)$  는 무한 신호 지속 시간 가짐

$$x(t) = x'(t) * h(t)$$

-  $x(t)$  또한 무한 신호 지속 시간 가짐

$\therefore$  구현 불가능

## Homework (Due date : 4/3)

- 연습문제 1.7, 1.14, 1.15
- $h(t) = 2W(\text{sinc } 2Wt) \cos 2\pi f_c t$  유도
- 위 식을 MATLAB으로 그려볼 것 (다양한 파라미터 값에 따라서...)

---

# 기저대역 디지털 전송

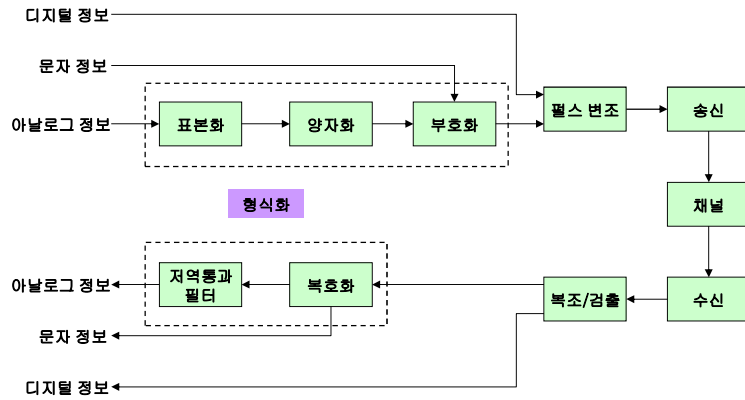
(교재 2장, 3장)

## 목차

---

- 표본화
- 양자화
- 기저대역 전송
- 신호와 잡음 및 신호 검출
- 심볼 간 간섭
- 등화기

# 기저대역 시스템



형식화 및 기저대역 신호 전송

# 데이터 형식화 (Formatting) : Character Coding

- ASCII (American Standard Code for Information Interchange)

Bits	5	0	1	0	1	0	1	0	1			
	6	0	0	1	1	1	0	0	1	1		
	1	2	3	4	7	0	0	0	0	1	1	1
0 0 0 0	NUL	DLE	SP	0	@	P	'	p	NUL	Null, or all zeros	DC1	Device control 1
1 0 0 0	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q	SOH	Start of heading	DC2	Device control 2
0 1 0 0	STX	DC2	"	2	B	R	b	r	STX	Start of text	DC3	Device control 3
1 1 0 0	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s	ETX	End of text	DC4	Device control 4
0 0 1 0	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t	EOT	End of transmission	NAK	Negative acknowledge
1 0 1 0	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u	ENQ	Enquiry	SYN	Synchronous idle
0 1 1 0	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v	ACK	Acknowledge	ETB	End of transmission
1 1 1 0	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w	BEL	Bell, or alarm	CAN	Cancel
0 0 0 1	BS	CAN	(	8	H	X	h	x	BS	Backspace	EM	End of medium
1 0 0 1	HT	EM	)	9	I	Y	i	y	HT	Horizontal tabulation	SUB	Substitute
0 1 0 1	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z	LF	Line feed	ESC	Escape
1 1 0 1	VT	ESC	+	;	K	[	k	{	VT	Vertical tabulation	FS	File separator
0 0 1 1	FF	FS	,	<	L	\	l		FF	Form feed	GS	Group separator
1 0 1 1	CR	GS	-	=	M	]	m	}	CR	Carriage return	RS	Record separator
0 1 1 1	SO	RS	.	>	N	^	n	~	SO	Shift out	US	Unit separator
1 1 1 1	SI	US	/	?	O	-	o	DEL	SI	Shift in	SP	Space
									DLE	Data link escape	DEL	Delete

Figure 2.3 Seven-bit American standard code for information interchange (ASCII).

## 데이터 형식화 (Formatting)

- EBCDIC: Extended Binary Coded Decimal Interchange Code

Bits	5 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1												PF	Punch off					
	6 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1												HT	Horizontal tab					
	7 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1												LC	Lower case					
	8 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1												DEL	Delete					
1 2 3 4																		SP	Space
0 0 0 0	NUL	SOH	STX	ETX	PF	HT	LC	DEL				SMM	VT	FF	CR	SO	SI	UC	Upper case
0 0 0 1	DLE	DC1	DC2	DC3	RES	NL	BS	IL	CAN	FM	CC			IFS	IGS	IRS	IUS	RES	Restore
0 0 1 0	DS	SOS	FS		BYP	LF	EOB	PRE				SM			ENQ	ACK	BEL	NL	New line
0 0 1 1			SYN		PN	RS	US	EOT							DC4	NAK	SUB	BS	Backspace
0 1 0 0	SP																	IL	Idle
0 1 0 1	&																	PN	Punch on
0 1 1 0	- /																	EOT	End of transmission
0 1 1 1																		BYP	Bypass
1 0 0 0		a	b	c	d	e	f	g	h	i								LF	Line feed
1 0 0 1		j	k	l	m	n	o	p	q	r								EOB	End of block
1 0 1 0		s	t	u	v	w	x	y	z									PRE	Prefix (ESC)
1 0 1 1																		RS	Reader stop
1 1 0 0		A	B	C	D	E	F	G	H	I								SM	Start message
1 1 0 1		J	K	L	M	N	O	P	Q	R								DS	Digit select
1 1 1 0			S	T	U	V	W	X	Y	Z								SOS	Start of significance
1 1 1 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9								IFS	Interchange file separator

Figure 2.4 EBCDIC character code set.

## Messages, Characters, and Symbols (1)

- Characters are encoded into a sequence of *bits*
- Groups of  $k$  bits can be combined to form *symbols*
- A system using a symbol set size of  $M \rightarrow M$ -ary *system*

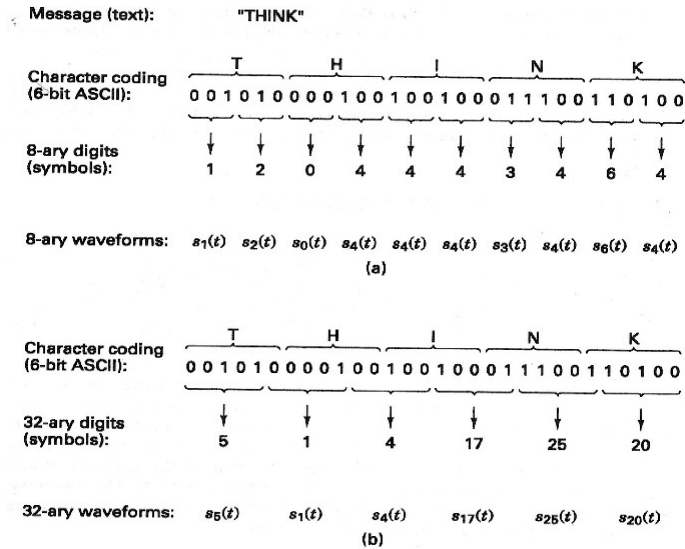
$$M=2^k$$

$k=1$  : binary system

$k=2$  : quaternary or 4-ary



## Messages, Characters, and Symbols (2)



## 표본화 (Sampling)

### □ 표본화 정리

- 이상적인 표본화
  - 대역폭  $f_m$  을 갖는 아날로그 신호  $x(t)$  를 가정

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

여기서,  $T_s$  는 표본화 주기

$$x_s(t) = x(t)x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

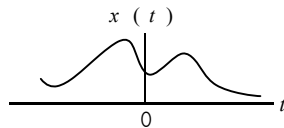
## 표본화 (Sampling)

$$X_{\delta}(f) = \mathfrak{T}[x_{\delta}(t)] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

여기서  $f_s = \frac{1}{T_s}$  는 표본화 주파수

$$X_s(f) = X(f) * X_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

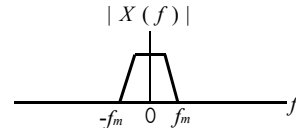
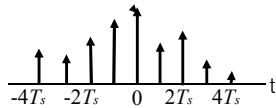
## 표본화 (Sampling)



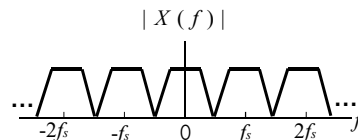
$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



$$x_s(t) = x(t) x_{\delta}(t)$$

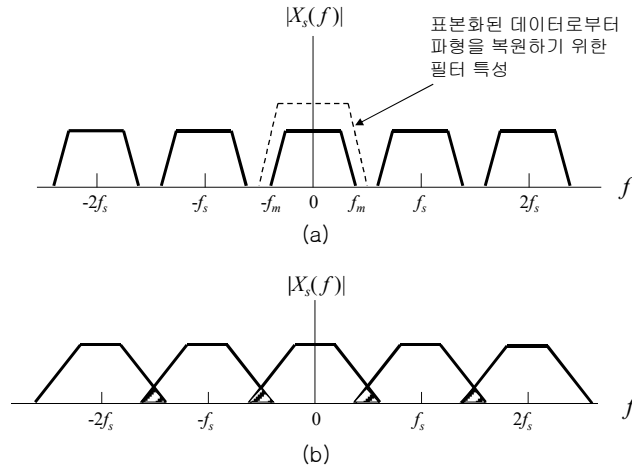


$$X_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$



푸리에 변환의 주파수 컨벌루션 특성을 이용한 표본화 정리

## 표본화 (Sampling)



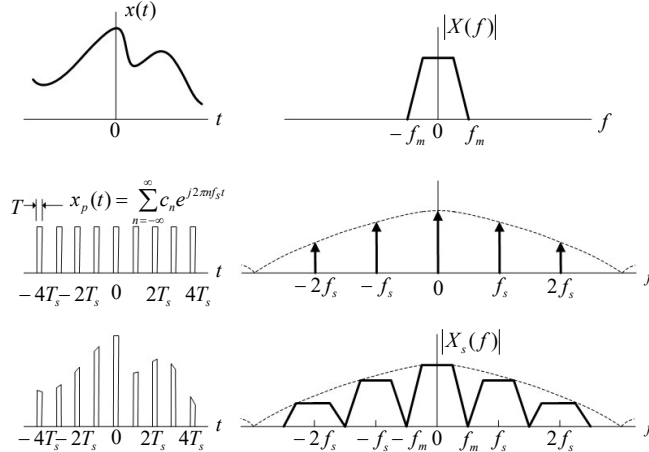
다양한 표본화 비율에 대한 스펙트럼 (a)  $f_s > 2f_m$  (b)  $f_s < 2f_m$

## 표본화 (Sampling)

- 나이퀴스트 (Nyquist) 기준
  - 이론적으로 아날로그 신호가 균일한 이산 시간의 표본으로부터 완벽하게 복원되기 위한 조건
  - $f_s \geq 2f_m$
- 나이퀴스트 주파수
  - $f_s = 2f_m$
- 에일리어싱 (aliasing)
  - 표본화 비율이  $f_s < 2f_m$ 와 같이 줄어든 경우

## 표본화 (Sampling)

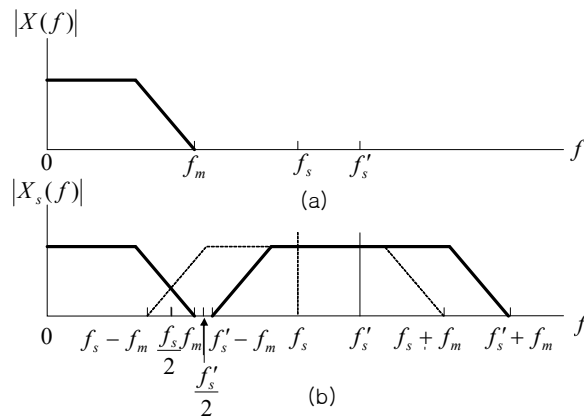
- 자연적 표본화 (Natural Sampling)



푸리에 변환의 주파수 전이 특성을 이용한 표본화 정리

## 표본화 (Sampling)

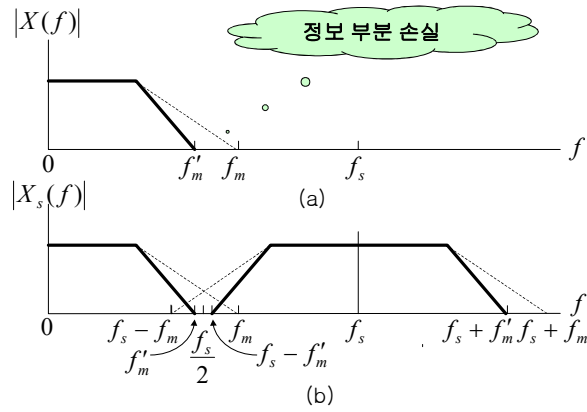
- 에일리어싱 제거방법



방법 1. 높은 표본화 비율로 에일리어싱 제거

(a) 연속 신호의 스펙트럼 (b) 표본화된 신호의 스펙트럼

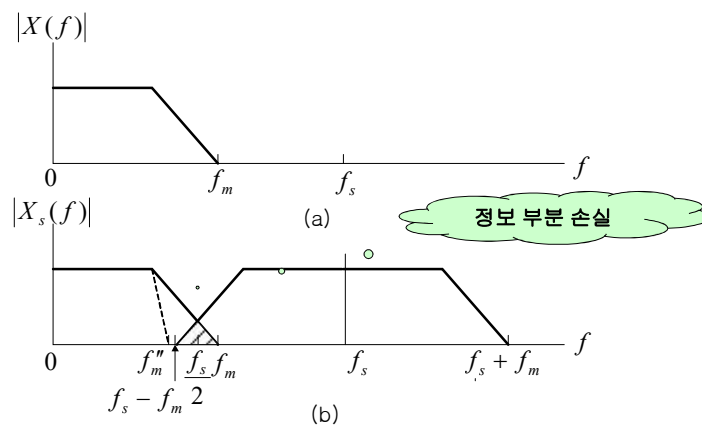
## 표본화 (Sampling)



### 방법 2. 가파른 전처리 차단 필터로 에일리어싱 제거

(a) 연속 신호의 스펙트럼 (b) 표본화된 신호의 스펙트럼

## 표본화 (Sampling)



### 방법 3. 후처리 필터로 에일리어싱 제거

(a) 연속 신호의 스펙트럼 (b) 표본화된 신호의 스펙트럼

## 표본화 (Sampling)

□ Aliasing signal

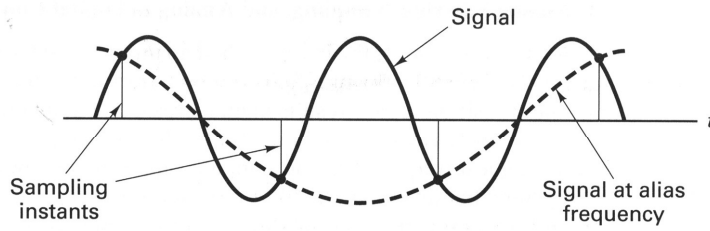


Figure 2.13 Alias frequency generated by sub-Nyquist sampling rate.

## 양자화 (Quantizing)

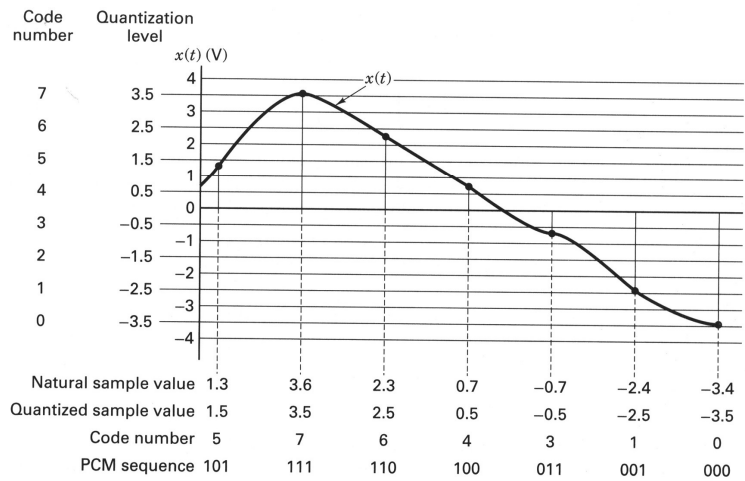


Figure 2.16 Natural samples, quantized samples, and pulse code modulation. (Reprinted with permission from Taub and Schilling, *Principles of Communications Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971, Fig. 6.5-1, p. 205.)

# 양자화 (Quantizing)

## □ 양자화 및 송수신

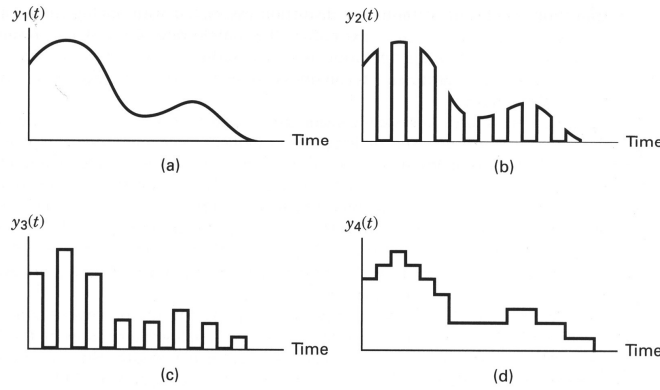
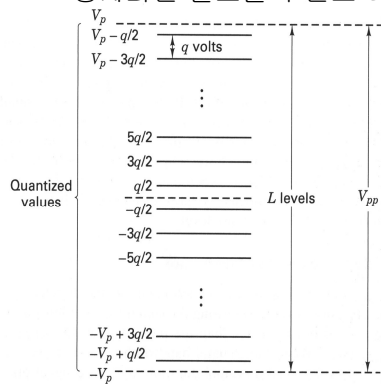


Figure 2.14 Amplitude and time coordinates of source data. (a) Original analog waveform. (b) Natural-sampled data. (c) Quantized samples. (d) Sample and hold.

# 양자화

- 양자화 잡음
  - 양자화된 표본들로 근사화 함으로써 생긴 왜곡
- 양자화된 펄스들의 신호 대 잡음 비



$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-q/2}^{+q/2} e^2 p(e) de \\ &= \int_{-q/2}^{+q/2} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{q^2}{12} \rightarrow \text{양자화 잡음} \end{aligned}$$

$$V_p^2 = \left(\frac{V_{pp}}{2}\right)^2 = \left(\frac{Lq}{2}\right)^2 = \frac{L^2 q^2}{4}$$

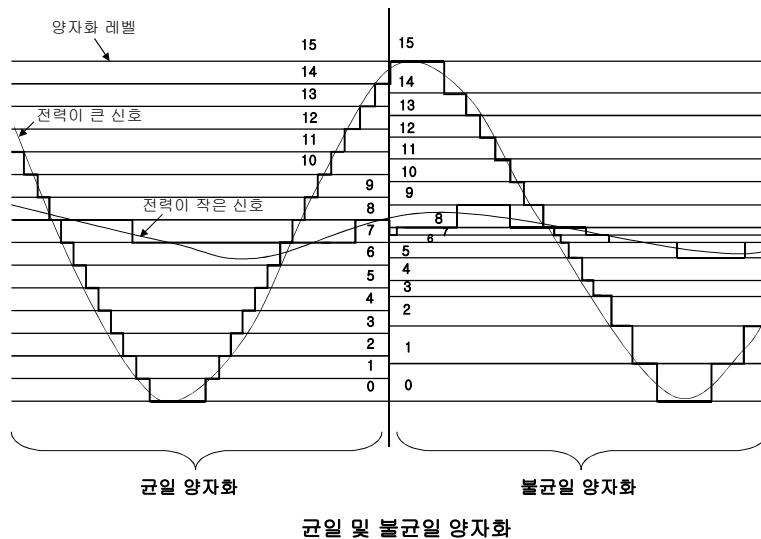
$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{L^2 q^2 / 4}{q^2 / 12} = 3L^2$$

Figure 2.15 Quantization levels.

## 양자화

- 균일 양자화 (uniform quantization)
  - 간격이 일정한 양자화
  - 양자화 잡음이 스텝 크기에 의존
  
- 불균일 양자화 (nonuniform quantization)
  - 작은 신호에 대해 더 세밀한 양자화
  - 큰 신호에 대해서는 대략적인 양자화
  - 양자화 잡음은 신호의 크기에 비례
  - 압신 (companding) = 압축 (compression) + 신장 (expanding)

## 양자화

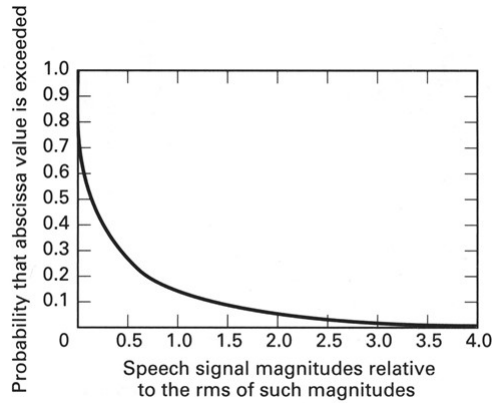


균일 및 불균일 양자화



## 양자화

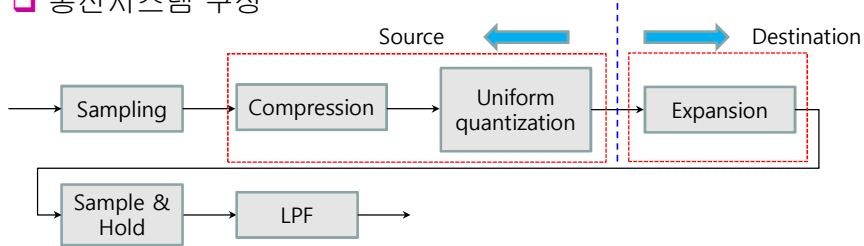
### 비선형 양자화의 타당성



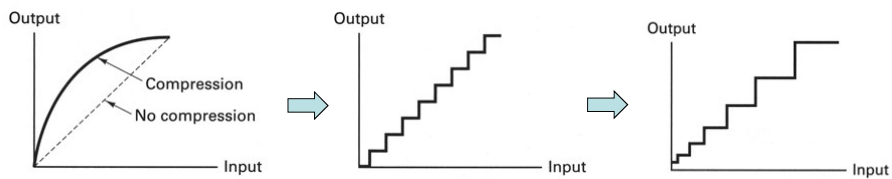
- 신호의 크기 < 0.5 → 75% 이상
- 신호의 크기 > 3.0 → 1% 미만
- 통신용 음성은 대부분 크기가 작음

## 양자화

### 통신시스템 구성

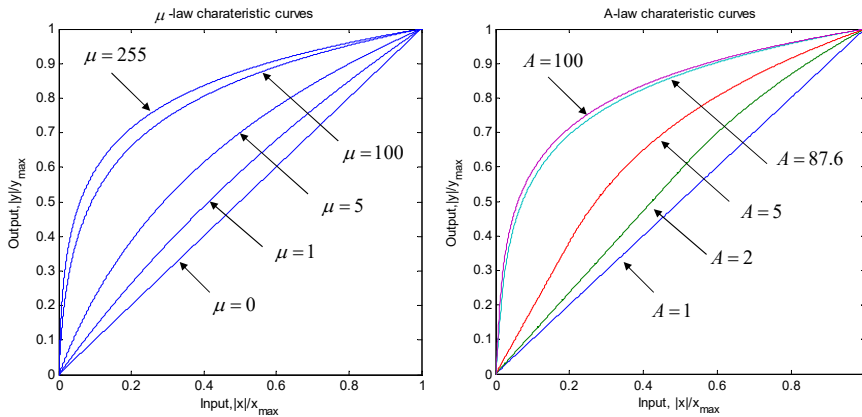


### 비선형 양자화 구현방법



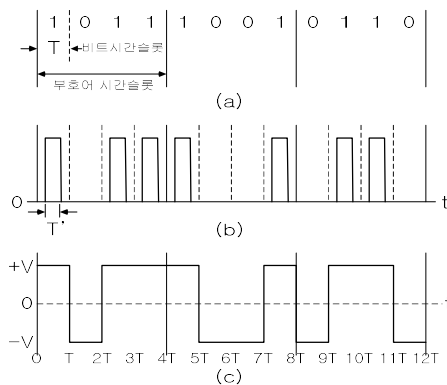
## 양자화

- 압신 (companding)
  - $\mu$ -law 압축 : 북미에서 사용 (표준값 255)
  - $A$ -law 압축 : 유럽 표준으로 사용 (표준값 87.6)



## 기저대역 전송

- 펄스 부호 변조 (PCM)
  - 표본화 → 양자화 → 부호화



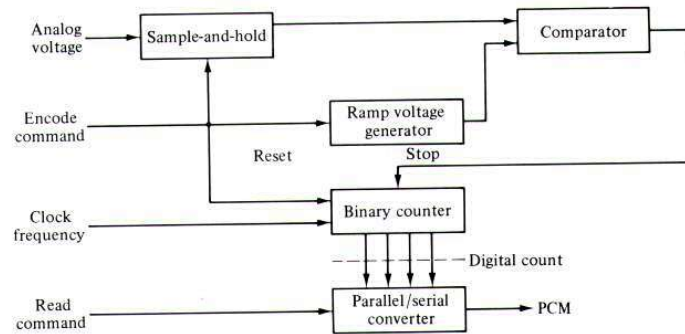
2진수의 파형 표현의 예

(a) PCM 시퀀스 (b) PCM의 펄스 표현 (c) 펄스 파형 (두 레벨 간의 전이)

## 기저대역 전송

### PCM Encoder : Ramp encoder

- Block diagram

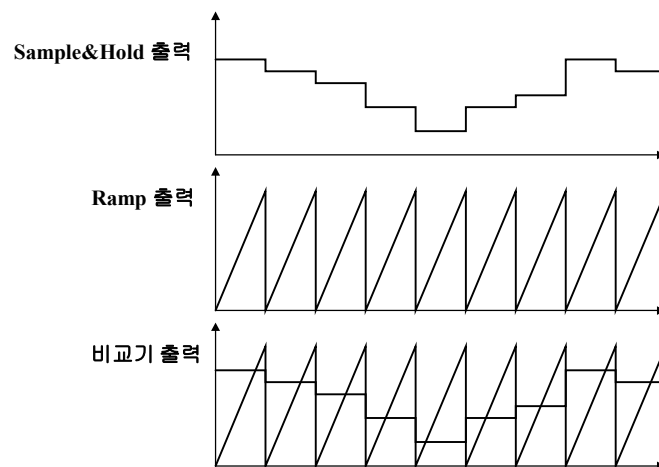


- Ramp 값과 Analog 값을 비교

## 기저대역 전송

### PCM Encoder : Ramp encoder (cont'd)

- How does it work?



## 기저대역 전송

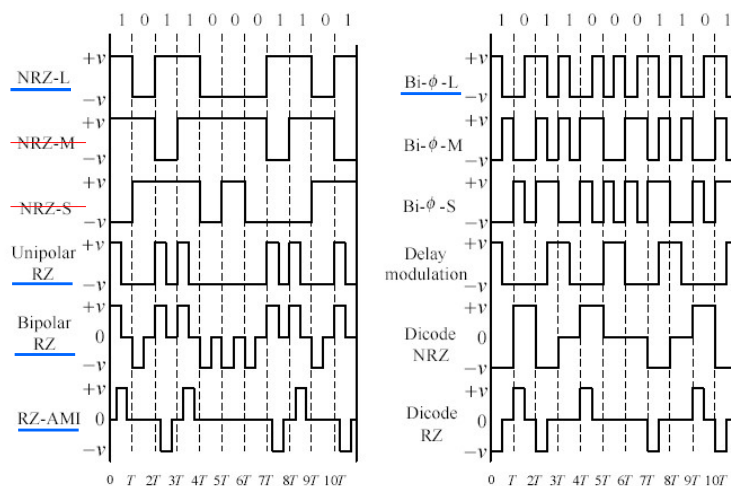
### □ PCM 파형 → 펄스파형 : Line coding

- NRZ (nonreturn-to-zero)
- RZ (return-to-zero)
- 위상 부호화 (phase encoded)
- 다치 2진수 (multilevel binary)

### □ Line coding의 장점

- 변조나 필터를 사용하지 않고 스펙트럼 shaping 기능을 수행
- DC 성분을 제거할 수 있음
- 에러검출이 가능
- 스펙트럼 점유효율을 높일 수 있음
- 비트 동기를 쉽게 얻을 수 있음

## 기저대역 전송



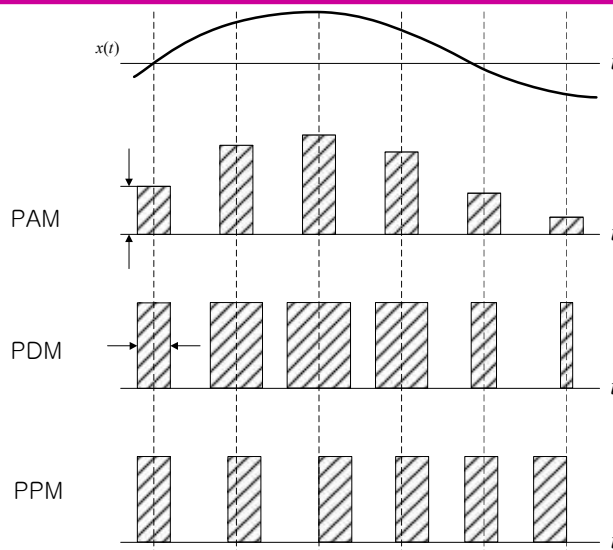
PCM 파형의 종류 (Line Coding)

## 기저대역 전송

- **M진 펄스 변조 파형**

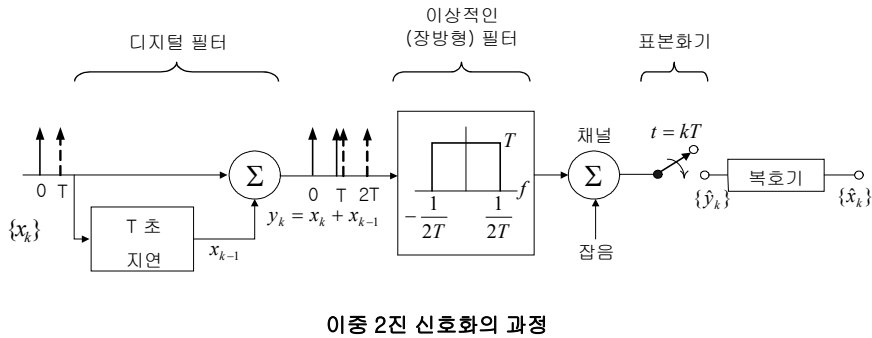
- 펄스 진폭 변조 (PAM: Pulse Amplitude Modulation)
- 펄스 위치 변화 (PPM: Pulse Position Modulation)
- 펄스 주기 변화 (PDM) 또는 펄스 넓이 변화 (PWM)
  - PDM: Pulse Duration Modulation
  - PWM: Pulse Width Modulation

## 기저대역 전송



## 기저대역 전송

- 상관 부호화 (Correlative Coding) → ISI를 억제하는 효과
  - 이중 2진 신호화 (duo-binary signaling)



## 기저대역 전송

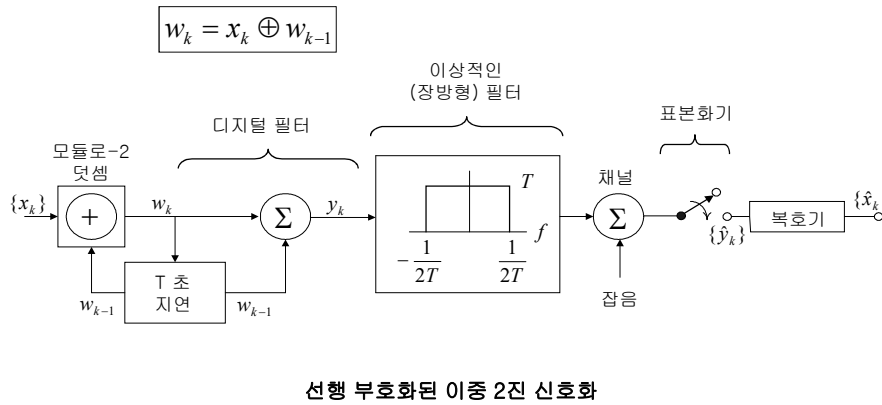
### Example of duo-binary coding

Binary $\{x_k\}$ :	0	0	1	0	1	1	0
Bipolar $\{x_k\}$ :	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1
$y_k = x_k + x_{k-1}$ :	-2	0	0	0	2	0	
Decoding decision rule	If $\hat{y}_k = 2$ , decide that $\hat{x}_k = +1$ (or binary one) If $\hat{y}_k = -2$ , decide that $\hat{x}_k = -1$ (or binary zero) If $\hat{y}_k = 0$ , decide <u>opposite of the previous one</u>						
Decoded bipolar sequence $\{\hat{x}_k\}$ :	-1	+1	-1	+1	+1	-1	
Decoded binary sequence $\{\hat{x}_k\}$ :	0	1	0	1	1	0	

오류가 발생하면  
전파됨!

## 기저대역 전송

- 선행 부호화 (precoding)



## 기저대역 전송

□ Example of duobinary pre-coding,  $w_k = x_k \oplus w_{k-1}$

Binary $\{x_k\}$ :	0	0	1	0	1	1	0
Precoded sequence $\{w_k\}$ :	0	0	1	1	0	1	1
Bipolar sequence $\{w_k\}$ :	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1
$y_k = w_k + w_{k-1}$ :	-2	0	+2	0	0	+2	+2
Decoding decision rule	If $\hat{y}_k = \pm 2$ , decide that $\hat{x}_k =$ binary zero If $\hat{y}_k = 0$ , decide that $\hat{x}_k =$ binary one						
Decoded binary sequence $\{\hat{x}_k\}$ :	0	1	0	1	1	0	

## 기저대역 전송

- 2진 신호화와 이중 2진 신호화의 비교
  - 이중 2진 신호화는 최소 대역폭으로 ISI를 피함 (나이퀴스트 기준)
  - 이중 2진 신호화는 2진 신호화보다 더 많은 전력 필요 (약 2.5dB)
- 다중 2진 신호화 (polybinary signaling)
  - 대역폭을 보다 효율적으로 사용할 수 있도록 이중 2진 신호화를 3중 또는 그 이상의 2진 신호화로 확장 → 다중 2진 신호화

$$y_k = x_k \oplus y_{k-1} \oplus y_{k-2} \oplus y_{k-3}$$

- 장점 : 원래의 신호  $\{x_k\}$ 의 스펙트럼 밀도를 재분배하여 시스템 대역폭 효율 개선

## Homework #2

- 연습문제 2.3, 2.4
- 연습문제 2.8, 2.18



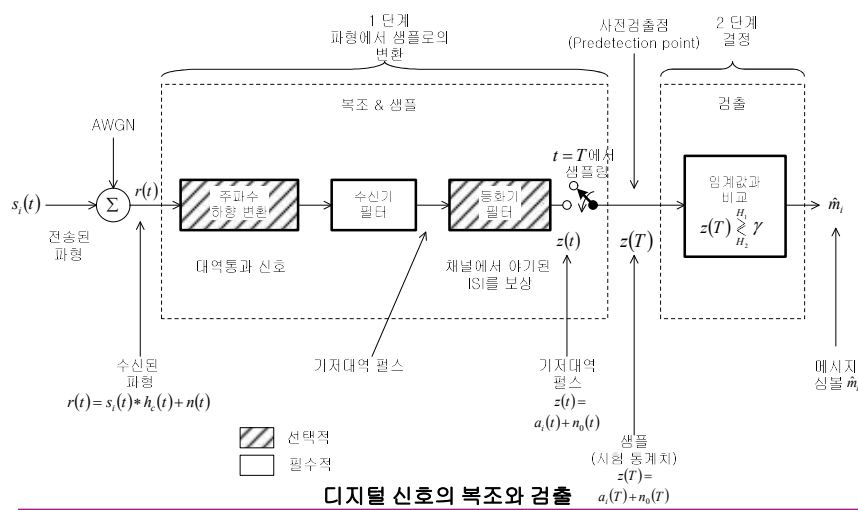
## 신호와 잡음 및 신호검출

### □ 통신시스템에서의 오류 및 성능 열화

- 오류 및 성능 열화 요인
  - 간섭
  - 잡음

## 신호와 잡음 및 신호검출

### □ 디지털 신호 복조와 검출



## 신호와 잡음 및 신호검출

- 주파수 하향변환 (down-conversion)
- 수신기 필터 (receiving filter)
  - 정합필터
  - 상관기
- 등화 필터 (equalizing filter)
  - 등화기

## 신호와 잡음 및 신호검출

### □ 신호와 잡음의 벡터 해석

- 기저함수 (basis function)
  - N개의 선형 독립함수의 집합으로 특성화 할 수 있는 **N 차원의 직교 공간 (orthogonal space)**을 정의
  - 직교 공간에서 임의의 함수는 **기저 함수의 선형 조합**으로 표현 가능

$$\int_0^T \psi_j(t) \psi_k(t) dt = K_j \delta_{jk} \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

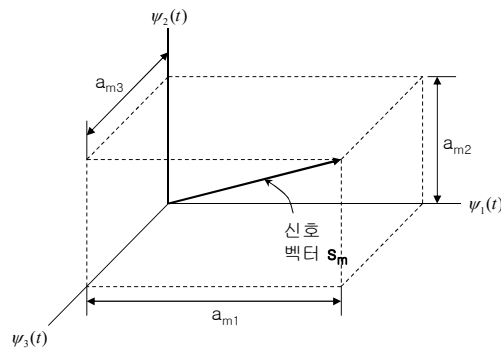
$$j, k = 1, \dots, N$$

$$\text{여기서, } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & , \quad j = k \\ 0 & , \quad \textit{otherwise} \end{cases}$$

## 신호와 잡음 및 신호검출

- 직교 공간 :  $K_j$ 가 0 이 아닐 때
- 단위 직교 공간 (orthonormal space) :  $K_j$ 가 1 일 때
- 기저 함수 집합의 각  $\psi_j(t)$  함수는 집합의 다른 함수와 독립
- 각각의  $\psi_j(t)$ 는 검출 과정에서 어떤 다른 함수와도 간섭 현상이 발생치 않아야 함
- 기하학적인 관점에서 각  $\psi_j(t)$ 는  $j \neq k$ 인 다른 모든  $\psi_k(t)$ 와 서로 수직

## 신호와 잡음 및 신호검출



신호 파형의 벡터적인 표현  $s_m(t)$ ,  $N = 3$

## 신호와 잡음 및 신호검출

- 구간  $T$ 에서의 파형으로 구성된 어떤 임의의 유한 집합  $\{s_j(t)\}$ 를 실제 구현할 수 있는  $N$ 개의 직교파형의 선형 조합으로 표현

$$\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t) \quad \text{여기서, } N \leq M$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad s_1(t) &= a_{11}\psi_1(t) + a_{12}\psi_2(t) + \dots + a_{1N}\psi_N(t) \\ s_2(t) &= a_{21}\psi_1(t) + a_{22}\psi_2(t) + \dots + a_{2N}\psi_N(t) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ s_M(t) &= a_{M1}\psi_1(t) + a_{M2}\psi_2(t) + \dots + a_{MN}\psi_N(t) \end{aligned}$$

## 신호와 잡음 및 신호검출

$$\rightarrow s_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}\psi_j(t), \quad i = 1, \dots, M, \& N \leq M$$

$$a_{ij} = \frac{1}{K_j} \int_0^T s_i(t)\psi_j(t) dt, \quad i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, 0 \leq t \leq T$$

여기서,  $M$  : 신호의 개수  
 $N$  : 차원(dimension)

- 계수  $a_{ij}$ 는 신호  $s_i(t)$ 의  $\psi_j(t)$  성분에 해당하는 값
- 수신기는 수신된 신호  $\mathbf{r}$ 이 벡터공간에서  $s_i(t)$ 와 유사한지를 평가

## 신호와 잡음 및 신호검출 (예제)

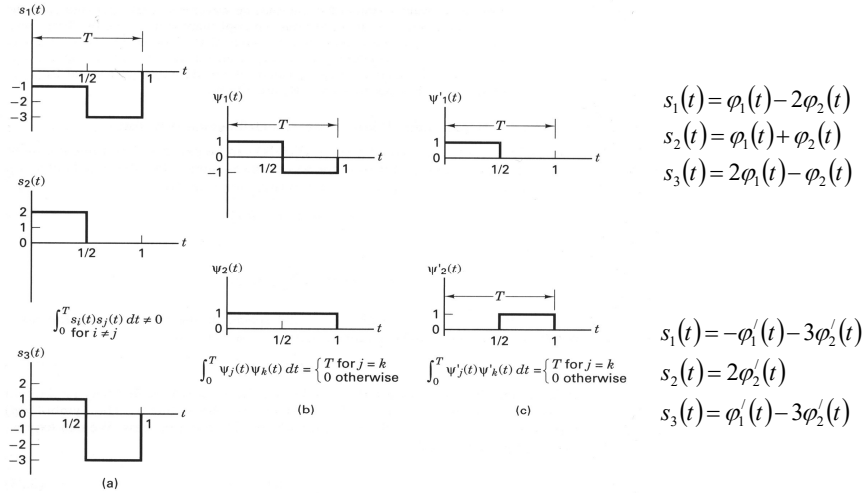
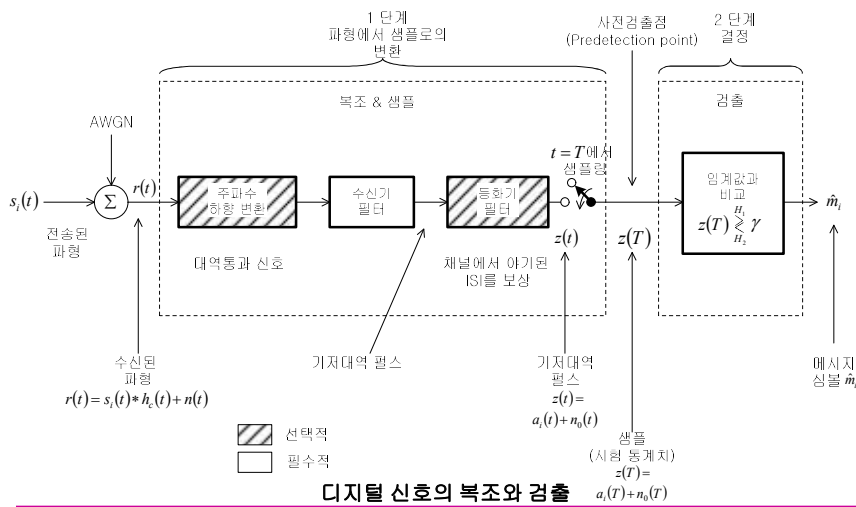


Figure 3.5 Example of an arbitrary signal set in terms of an orthogonal set. (a) Arbitrary signal set. (b) A set of orthogonal basis functions. (c) Another set of orthogonal basis functions.

## 신호와 잡음 및 신호검출

### □ 디지털 신호 복조와 검출



### 신호와 잡음 및 신호검출

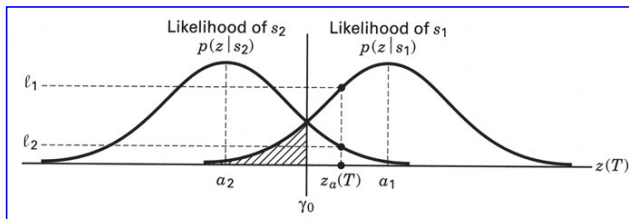
- Output of step 1, pdf of Gaussian random noise  

$$z(T) = a_i(T) + n_0(T), \quad i = 1, 2$$

$$p(n_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{\sigma_0}\right)^2\right]$$
- Likelihood of  $s_1$  Likelihood of  $s_2$   

$$P(z | s_1) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

$$P(z | s_2) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_0}\right)^2\right]$$



If  $z(T) > \gamma \rightarrow H_1$   
 If  $z(T) < \gamma \rightarrow H_2$

### 신호와 잡음 및 신호검출

#### Maximum Likelihood Receiver Structure

If  $z(T) > \gamma \rightarrow H_1$   
 If  $z(T) < \gamma \rightarrow H_2$

$$z(T) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

Selection of  $\gamma$  : minimum error!

Computation for this minimum error value

$$\frac{P(z|s_1)}{P(z|s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

Likelihood ratio test

If  $P(s_1) = P(s_2)$

$$z(T) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{a_1 + a_2}{2} = \gamma_0$$

Maximum likelihood detector

Choose  $s_1(t)$  if  $P(z_a | s_1) > P(z_a | s_2)$   
 Choose  $s_2(t)$  if  $P(z_a | s_1) < P(z_a | s_2)$

## 신호와 잡음 및 신호검출

- Error Probability

$$P(e|s_1) = P(H_2 | s_1) = \int_{-\infty}^{z_0} P(z | s_1) dz \quad P(e|s_2) = P(H_1 | s_2) = \int_{z_0}^{\infty} P(z | s_2) dz$$

Bit error probability

$$P_B = \sum_{i=1}^2 P(e, s_i) = \sum_{i=1}^2 P(e | s_i) P(s_i) = P(e | s_1) P(s_1) + P(e | s_2) P(s_2)$$

$$P_B = P(H_2 | s_1) P(s_1) + P(H_1 | s_2) P(s_2)$$

When a priori probabilities are equal and in case of symmetric pdf

$$P_B = \frac{1}{2} P(H_2 | s_1) + \frac{1}{2} P(H_1 | s_2) = P(H_2 | s_1) = P(H_1 | s_2)$$

$$P_B = \int_{(a_1+a_2)/2}^{\infty} p(z | s_2) dz = \int_{(a_1+a_2)/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right] dz$$

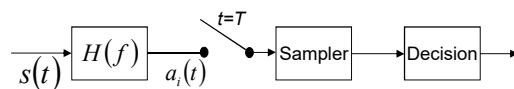
Put  $u = (z - a_2) / \sigma_0$

$$P_B = \int_{(a_1-a_2)/2\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right)$$

## 신호와 잡음 및 신호검출

- 정합 필터 (matched filter)

- Linear filter designed to provide the maximum signal-to-noise power ratio at its output for a given transmitted symbol



$$a_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi ft} df \quad \sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi ft} df \right|^2}{N_0/2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

By Schwarz's inequality  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx$

The equality holds if  $f_1(x) = k f_2^*(x)$  ➡ Maximum S/N ratio condition

## 신호와 잡음 및 신호검출

### 정합필터 (cont'd)

$$H(f): f_1(x), S(f)e^{j2\pi fT} : f_2(x) \Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

$$\left( \frac{S}{N} \right)_T \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \Rightarrow \max \left( \frac{S}{N} \right)_T = \frac{2E}{N_0}$$

신호 에너지와 잡음전력 만의 함수

Thus, the optimum filter transfer function (정합필터),  $H_0(f)$

$$H(f) = H_0(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT}$$

$$h(t) = \mathfrak{F}^{-1} \{ kS^*(f)e^{-j2\pi fT} \} = \begin{cases} ks(T-t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}\{f(t-t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \longrightarrow \boxed{s(T-t)} \longrightarrow z(T)$$

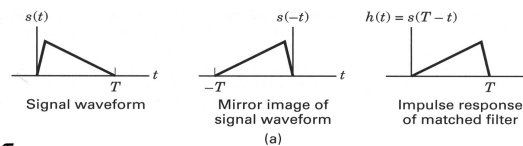
## 신호와 잡음 및 신호검출

### Correlator로 정합필터 구현

$$z(t) = r(t) \otimes h(t)$$

$$= \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$z(t) = \int_0^t r(\tau) \underline{s(T-t+\tau)}d\tau$$



When  $t = T$

$$\boxed{z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau)d\tau} : \text{Correlation (A)}$$

Where

$r(t)$  : Received waveform

$s(t)$  : Transmitted waveform

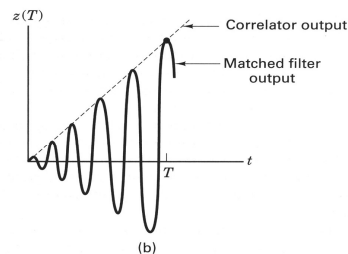


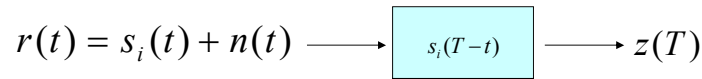
Figure 3.7 Correlator and matched filter. (a) Matched filter characteristic. (b) Comparison of correlator and matched filter outputs.



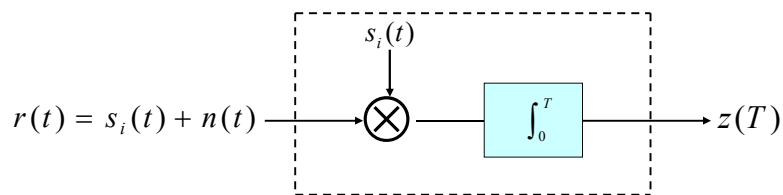
## 신호와 잡음 및 신호검출

### Matched filter vs. Correlator

- Matched filter



- Correlator로 정합필터 구현



## 신호와 잡음 및 신호검출

### Optimizing Error Performance

$$P_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right) \Rightarrow (a_1 - a_2)/(2\sigma_0) \text{ 값을 최대로 할 것!}$$

With Matched Filter

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2} = \frac{2E_d}{N_0} \quad \text{where } E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \Rightarrow P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right)$$

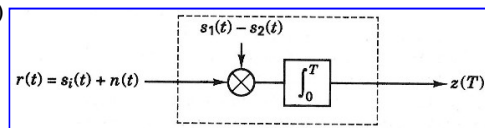
Cross-correlation coefficient,  $\rho$

$$\rho = \frac{1}{E_b} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = \cos \theta, \quad \rightarrow \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

$$E_d = \int_0^T s_1^2(t)dt + \int_0^T s_2^2(t)dt - 2\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt, \quad E_b = \int_0^T s_1^2(t)dt = \int_0^T s_2^2(t)dt$$

$$E_d = E_b + E_b - 2\rho E_b = 2E_b(1 - \rho)$$

$$\therefore P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1 - \rho)}{N_0}}\right)$$

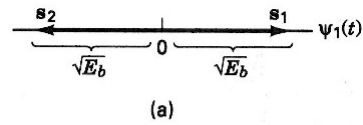


## 신호와 잡음 및 신호검출

### Optimizing Error Performance (cont'd)

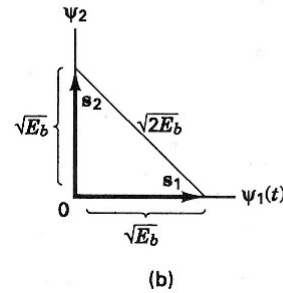
- Anticorrelated (i.e., antipodal signal):  $\rho = -1$

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



- Orthogonal signal:  $\rho = 0$

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



## 신호와 잡음 및 신호검출

### Error Probability Performance of Binary Signaling

- Unipolar Signaling

$$s_1(t) = A, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{for binary 1}$$

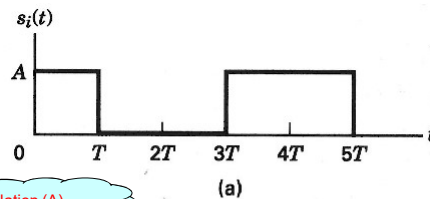
$$s_2(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{for binary 0}$$

$s_1(t)$  and  $s_2(t)$  are orthogonal set

When  $r(t) = s_1(t) + n(t)$ ,  $z(T)$  becomes

$$a_1(T) = E\{z(T) | s_1(t)\} = \int_0^T \{A^2 + An(t)\} dt = A^2T$$

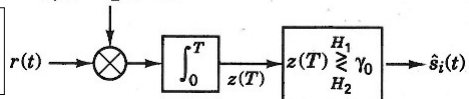
Correlation (A)  
참조



Reference signal  
 $s_1(t) - s_2(t) = A$

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

where  $E_d = A^2T$ ,  $E_b = A^2T/2$



## 신호와 잡음 및 신호검출

- Bipolar Signaling

$$s_1(t) = +A, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{for binary 1}$$

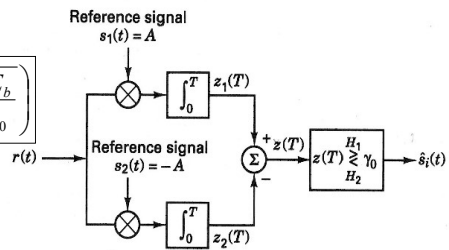
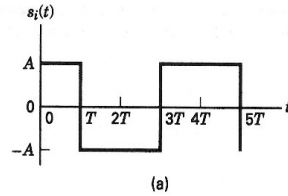
$$s_2(t) = -A, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{for binary 0}$$

Test statistic is formed from the signal difference

$$z(T) = z_1(T) - z_2(T)$$

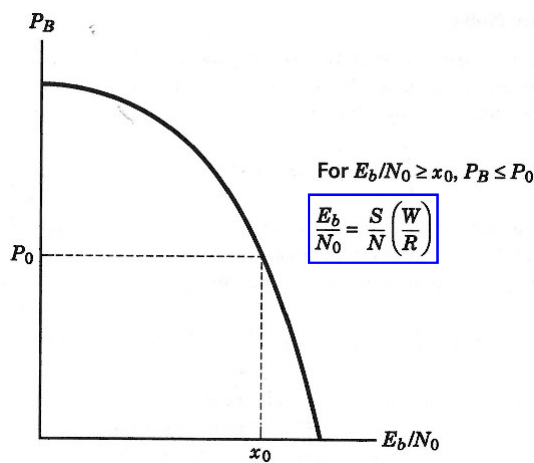
$$E_d = (2A)^2 T, \quad E_b = A^2 T$$

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



## 신호와 잡음 및 신호검출

- Bit error probability vs.  $E_b/N_0$



## 신호와 잡음 및 신호검출

- Bit error performance of unipolar and bipolar signaling

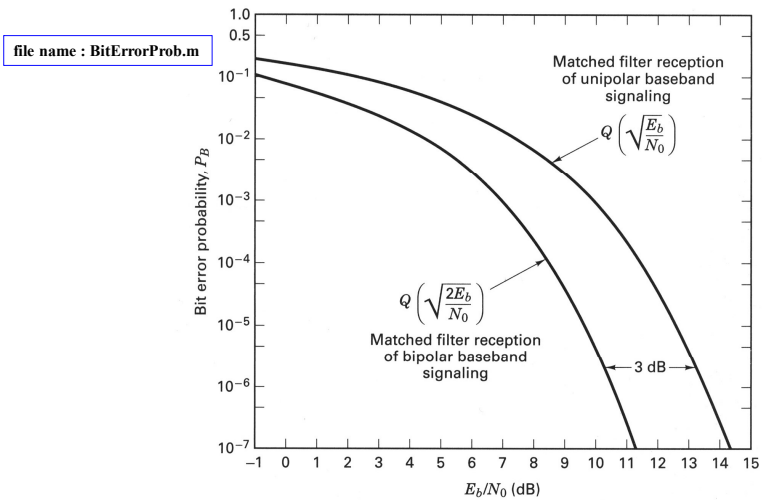
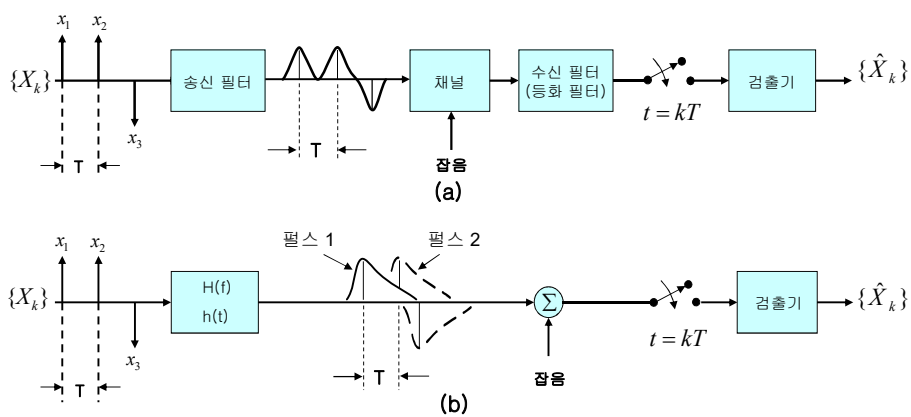


Figure 3.14 Bit error performance of unipolar and bipolar signaling.

## 심볼 간 간섭



### 검출 과정에서 심볼 간 간섭

(a) 전형적인 기저대역 디지털 시스템 (b) 등가 모델

## 심볼 간 간섭

- 전체 등가 시스템 전달 함수

$$H(f) = H_t(f)H_c(f)H_r(f)$$

여기서,  $H_t(f)$  : 송신단의 필터

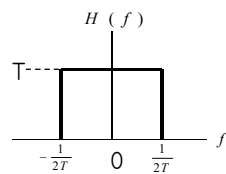
$H_c(f)$  : 채널에서 야기되는 필터링 효과

$H_r(f)$  : 수신/등화 필터

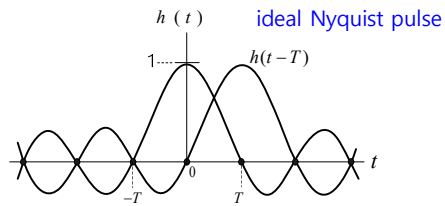
## 심볼 간 간섭

- 심볼 간 간섭을 피하기 위한 **최소 대역폭**과 펄스 형태

- $W = 1/2T = R_s/2$  (Hz)의 대역폭을 갖는 시스템



(a)



(b)

심볼 간 간섭을 제거하기 위한 Ideal 나이퀴스트 채널들

(a) 전달 함수 (b)  $h(t) = \text{sinc}(t/T)$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \text{sinc}(f\tau), \quad f(t) \leftrightarrow F(f), \quad F(t) \leftrightarrow f(-f) : \text{Duality}$$

$$H(\omega) = T \text{rect}(Tf), \quad \therefore \tau = \frac{1}{T} \rightarrow \boxed{h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)}$$

## 심볼 간 간섭

- 대역폭이  $W = 1/2T = R_s/2$  hertz 인 시스템이 지원 가능한 최대 전송률은  $2W = 1/T = R_s$  symbols/s (Nyquist bandwidth constraints)

- 심볼률 패킹 (symbol-rate packing)  
: 단위주파수(Hz)당 가능한 최대 심볼 전송률

$$\frac{R_s}{W} = \frac{R_s}{R_s/2} = 2 \quad (\text{symbol/s/Hz}) \quad : \text{심볼 간 간섭이 없는 경우}$$

## 심볼 간 간섭

### □ 심볼 간 간섭을 줄이기 위한 펄스 성형

- 올림 코사인 필터 (raised cosine filter)
  - 나이퀴스트 조건은 실제적으로는 실현 불가
    - 이론적인 최소의 대역폭을 초과하는 대역폭 필요

$$H(f) = \begin{cases} 1 & , \quad |f| < 2W_0 - W \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{|f| + W - 2W_0}{W - W_0}\right) & , \quad 2W_0 - W < |f| < W \\ 0 & , \quad |f| > W \end{cases}$$

## 심볼 간 간섭

여기서,  $W$  : 절대 대역폭

$$W_0 = 1/2T : \text{최소 나이퀴스트 대역폭}$$

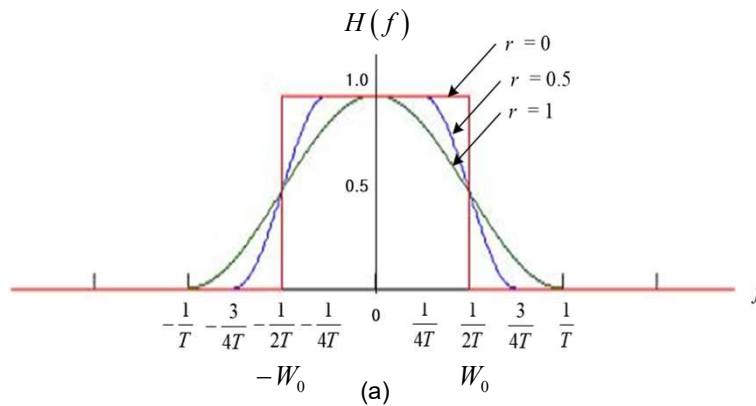
(-6dB 대역폭 또는 진폭의 반이 되는 지점)

- 초과 대역폭 :  $W - W_0$

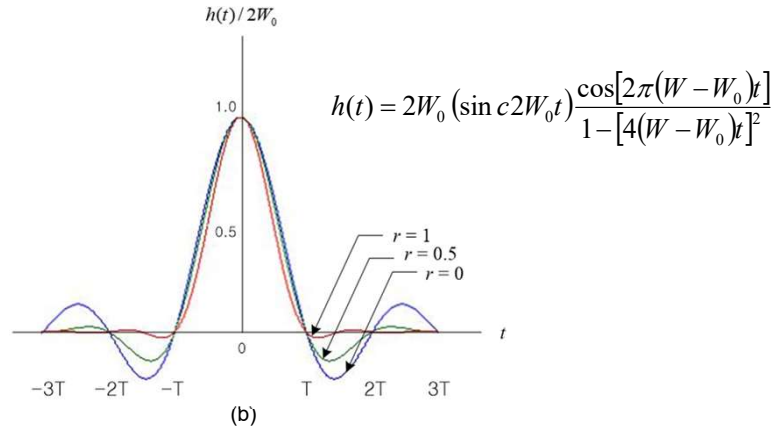
- 롤오프 계수 (roll-off factor) :  $r = \frac{(W - W_0)}{W_0} \rightarrow 0 \leq r \leq 1$

→ 부분 초과대역  
(fractional excess bandwidth)

## 심볼 간 간섭



## 심볼 간 간섭



올림 코사인 필터(raised cosine filter)의 특성들  
(a) 전달 함수 (b) 임펄스 응답

## 심볼 간 간섭

- $r=0$ : 나이퀴스트 최소 대역폭의 경우
- $r=1$ : 요구하는 초과 대역폭이 100%인 경우
  - 1 symbol/s/Hz의 심볼률 패킹을 얻음
- 일반적인 관계

$$W = \frac{1}{2}(1+r)R_s \quad \text{기저대역 신호의 경우}$$

$$W = (1+r)R_s \quad \text{대역통과 신호의 경우}$$

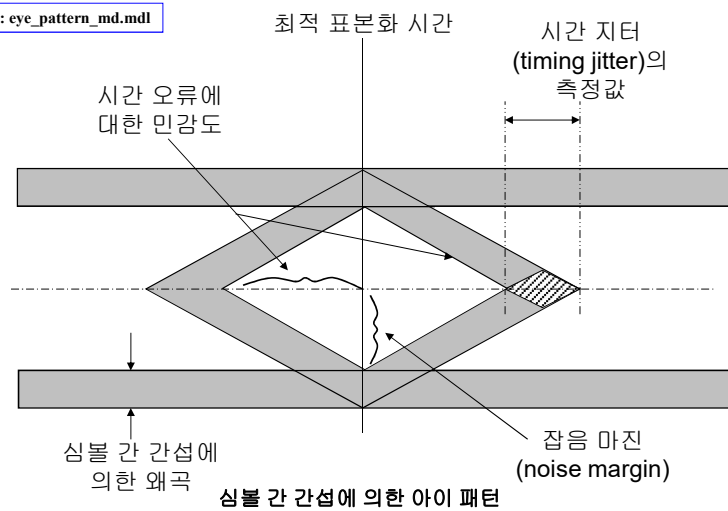


## 심볼 간 간섭

- 아이 패턴 (eye pattern)
  - 기저대역 신호에 대한 시스템의 응답을 측정하여 오실로스코프로 표시
    - 최적의 표본화 시간은 최대의 눈 개방(eye opening)에 상응하며 잡음으로부터 신호를 최대한 보호
    - 심볼 간 간섭이 증가할 수록 눈이 감겨지고, 심볼 간 간섭이 감소할 수록 눈이 떠짐

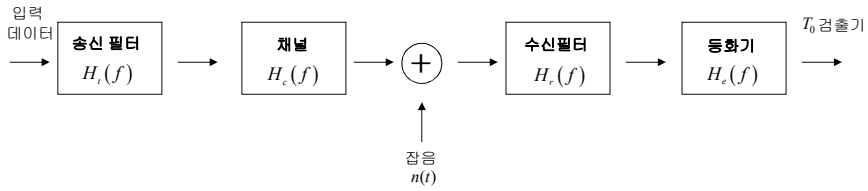
## 심볼 간 간섭

file name : eye\_pattern\_md.mdl



# 등화기

## □ 등화기



등화기를 가진 시스템 블록도

- 채널을 대역제한 필터로 표현할 수 있음.

$$H_c(f) = |H_c(f)|e^{j\theta(f)}$$

- 이상적인 채널의 경우,

$|H_c(f)|$  : 고정된 값

$\theta(f)$  :  $f$ 에 따라 선형적인 값

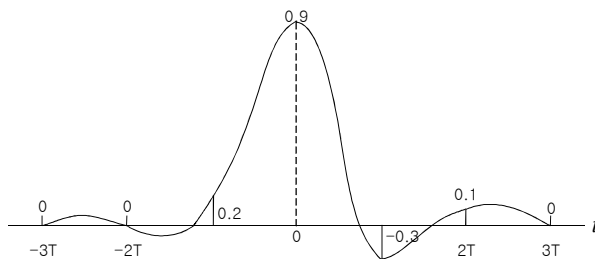
# 등화기

- 등화기를 사용하지 않을 경우 전체적인 시스템 주파수 응답

$$H(f) = H_t(f)H_c(f)H_r(f)$$

여기서,  $H(f)$ 는 송수신간 등가 전달 함수

- 실제적인 경우,  $|H_c(f)|$ ,  $\theta(f)$ 의 값에 변화가 생겨 심볼간 간섭(ISI)를 일으킴.



왜곡을 보이는 수신된 펄스

## 등화기

- 등화기를 사용할 경우 전체적인 시스템 주파수 응답

$$H(f) = H_t(f)H_c(f)H_r(f)H_e(f)$$

- 송신기와 수신기 필터만 고려한 주파수 응답을 아래와 같이 놓으면,

$$H_{RC}(f) = H_t(f)H_r(f) \leftarrow \text{Raised cosine filter}$$

$$\rightarrow H_c(f) = \frac{1}{H_c(f)} = \frac{1}{|H_c(f)|} e^{j(-\theta_c(f))} \quad (\text{역 채널 필터})$$

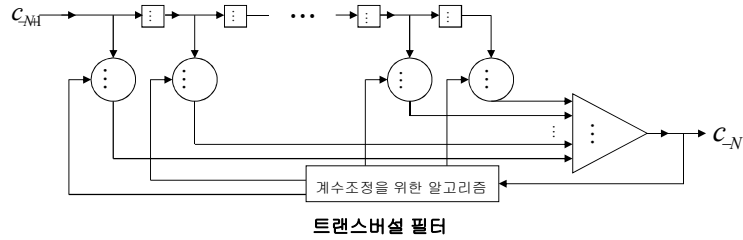
## 등화기

- 등화기의 종류

기준	기준에 따라 분류	설명
선형성	트랜스버설 등화기 >제로 포싱 등화기 >최소 평균 자승 오차 등화기	순방향 원소들로 구성.
	결정 제한 등화기	제한(feedback) 원소도 포함.
계산 자동 성질 (the automatic nature of operation)	사전 설정(preset) 등화기	계수값을 처음에 결정함.
	적응(adaptive) 등화기	상황에 따라 적응적으로 계수값을 바꿈.
필터의 업데이트 속도(rate)	심볼 간격(symbol-spaced) 등화기	1 심볼당 1 샘플
	부분 간격(fractionally spaced) 등화기	1 심볼당 다수 샘플

## 등화기

### 트랜스버설 등화기 (선형 등화기)



$$z(k) = \sum_{n=-N}^N x(k-n)c_n$$

$$k = -2N, \dots, 2N, \quad n = -N, \dots, N$$

## HW #3

- 연습문제 3.2
- 연습문제 3.6, 3.7
- 연습문제 3.8, 3.10
- Raised Cosine 함수(3-78, 3-79) MATLAB으로 그리기
- Due date : 4월 14일

---

# 대역통과 디지털 전송

(제 4장)

## 목차

---

- 대역통과 디지털 변조
- 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출
- 동기 및 비동기 검출
- 비트 및 심볼 오류 성능

## 대역통과 디지털 변조

### □ Bandpass Signaling

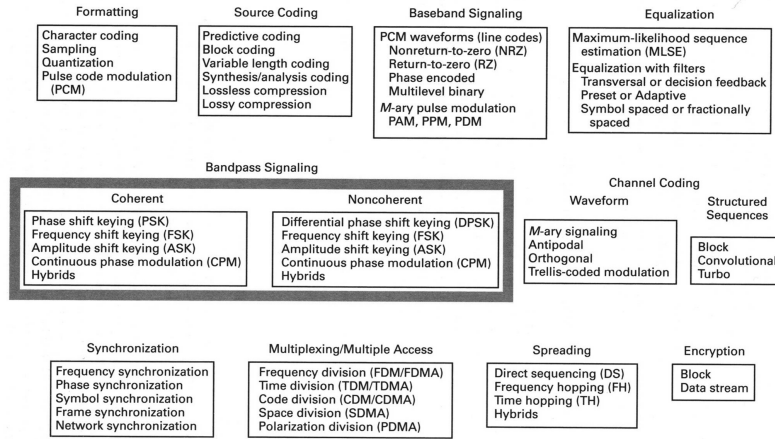


Figure 4.1 Basic digital communication transformations.

## 대역통과 디지털 변조

### □ 디지털 변조

- 캐리어 신호의 일반적 형태

$$s(t) = A(t) \cos \theta(t)$$

여기서,  $A(t)$  : 시변 진폭

$\theta(t) = \omega_0 t + \phi(t)$  : 시변 각

$\omega_0$  : 반송파의 각주파수

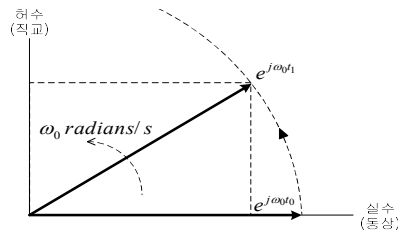
$\phi(t)$  : 위상

## 대역통과 디지털 변조

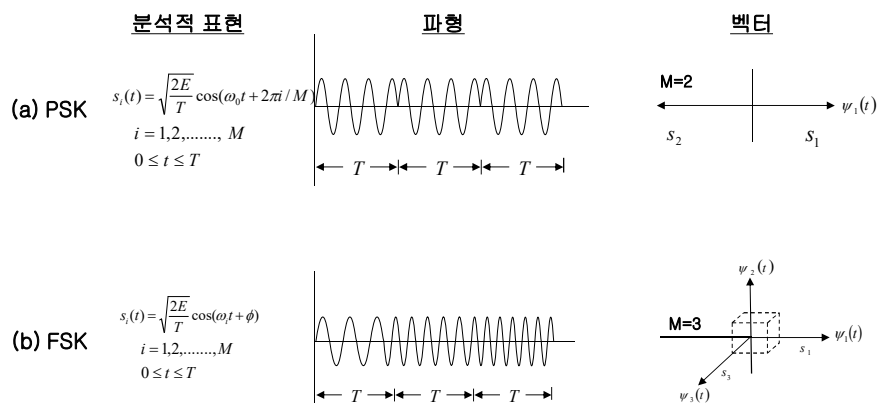
- 정현파의 페이지 표현
  - 정현 반송파의 복소 표현

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

동상(inphase) 성분    직교(quadature) 성분

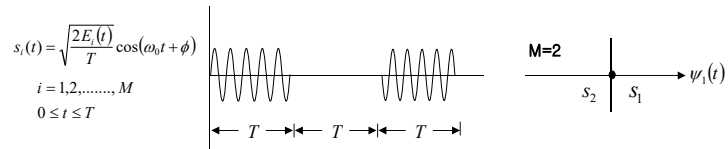


## 대역통과 디지털 변조

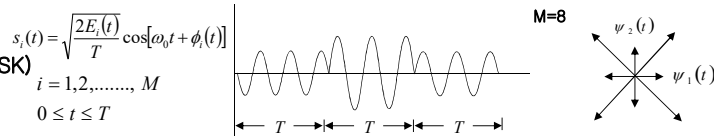


## 대역통과 디지털 변조

(c) ASK



(d) QAM(ASK/PSK)



## 대역통과 디지털 변조

- 위상 편이 키잉 (PSK: phase shift keying)

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi_i(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$

여기서,  $\phi_i(t) = \frac{2\pi i}{M}, \quad i = 1, \dots, M$

$E$ : 심볼 에너지 =  $\int_0^T s_i^2(t) dt$

$T$ : 심볼 지속 시간

- 주파수 편이 키잉 (FSK: frequency shift keying)

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \phi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$



## 대역통과 디지털 변조

- 진폭 편이 키잉 (ASK: amplitude shift keying)

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$

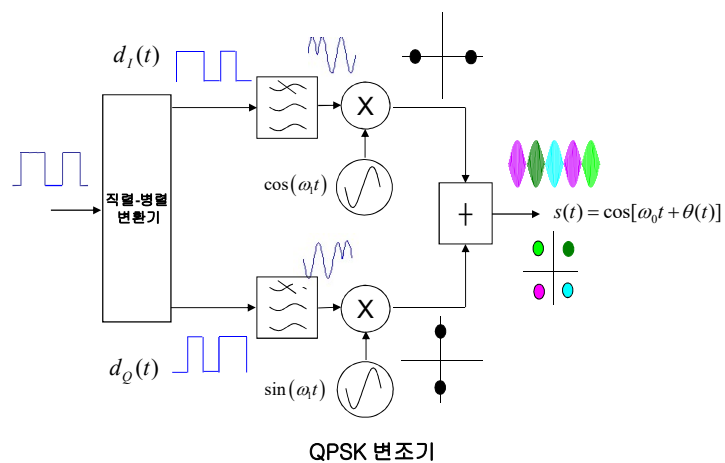
- 2진 ASK (on-off 편이방식) : 무선 전신에서 사용되었던 디지털 변조의 초기 형태중의 하나

- 직교 진폭 변조 (QAM: quadrature amplitude modulation)

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi_i(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$

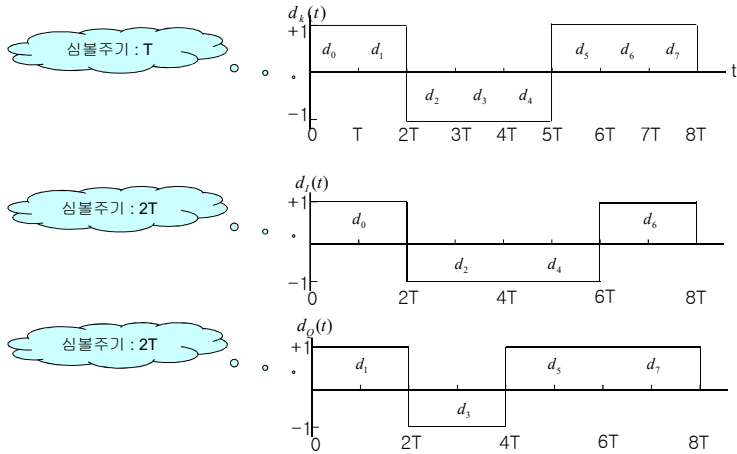
## 대역통과 디지털 변조

- QPSK 변조(9.8.1절 참조)



## 대역통과 디지털 변조

### □ 심볼단위의 QPSK



## 대역통과 디지털 변조

- $d_k(t) = d_0, d_1, d_2, \dots$  : 원래 데이터 스트림
- $d_I(t) = d_0, d_2, d_4, \dots$  : 동상 데이터 스트림
- $d_Q(t) = d_1, d_3, d_5, \dots$  : 직교 데이터 스트림
- $d_I(t)$ 와  $d_Q(t)$ 는  $d_k(t)$  비트 율의 절반 (심볼주기는 2배)
- QPSK 파형

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ d_I(t) \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) + d_Q(t) \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) \right]$$

$$= \cos(\omega_0 t + \theta(t))$$

여기서,  $\theta(t) = \tan^{-1} \frac{d_Q(t)}{d_I(t)}$

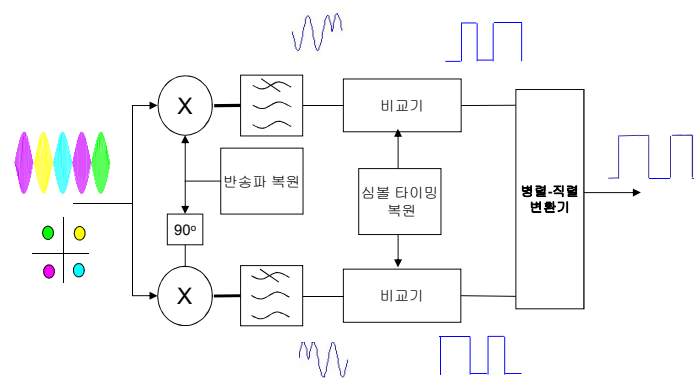
## 대역통과 디지털 변조

- QPSK 복조

- $\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$ 와  $\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$ 가 서로 직교하기 때문에, 각각

BPSK 신호로 분리하여 검출 가능

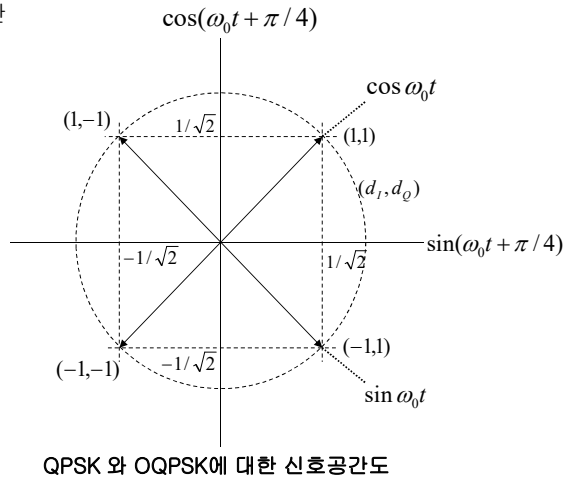
## 대역통과 디지털 변조



QPSK 복조기

## 대역통과 디지털 변조

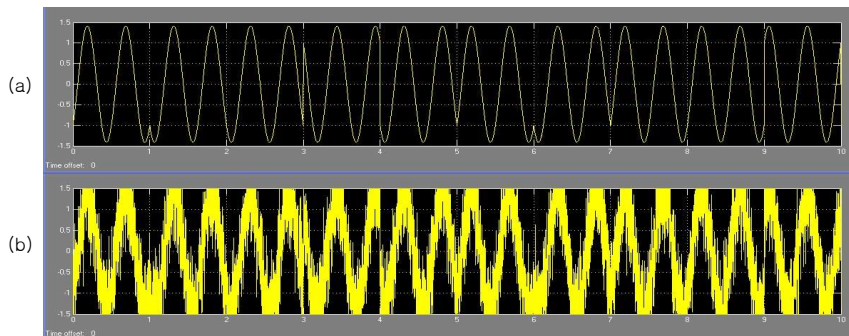
- QPSK 신호 특성
  - 신호공간



## 대역통과 디지털 변조

- 신호 파형(그레이 부호화 적용)

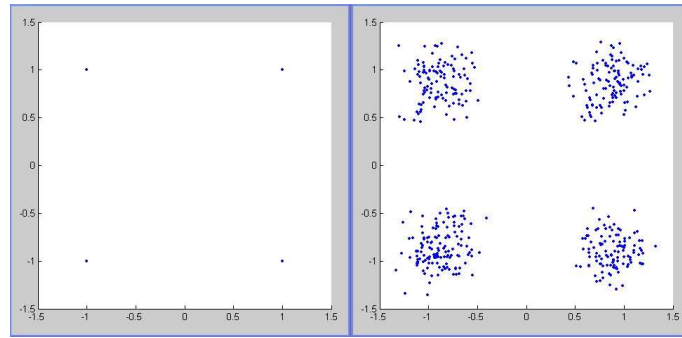
$d(t) = 10 \quad 11 \quad 11 \quad 01 \quad 11 \quad 10 \quad 11 \quad 10 \quad 10 \quad 00$



QPSK 신호파형 (a)송신부 (b)수신부

## 대역통과 디지털 변조

- 신호점 정상도

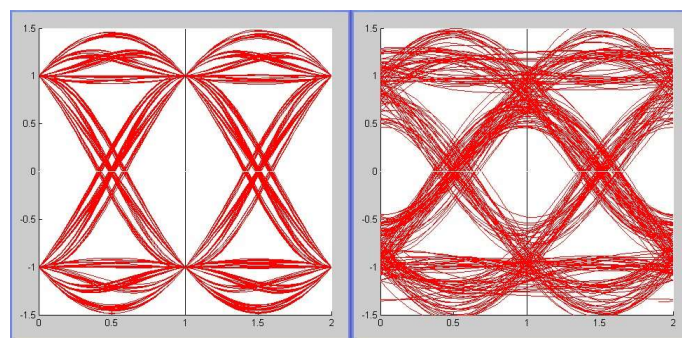


송신부

수신부

## 대역통과 디지털 변조

- 아이 패턴

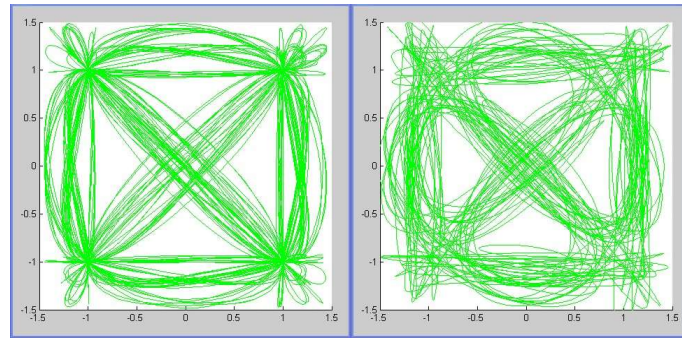


송신부

수신부

## 대역통과 디지털 변조

- 공간 다이어그램



송신부

수신부

## 대역통과 디지털 변조

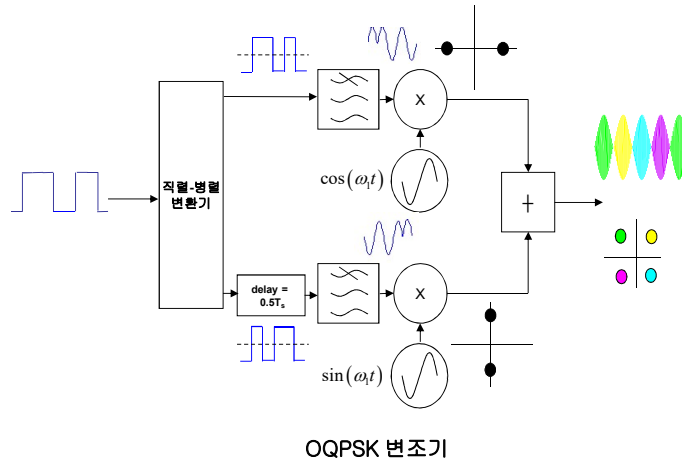
### □ Offset QPSK (OQPSK)

- QPSK와 OQPSK의 차이점

- 펄스 스트림  $d_1(t)$  와  $d_0(t)$  의 타이밍이  $T$  만큼 차이 나게 배열

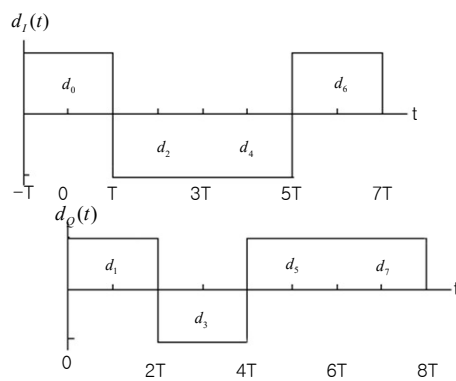
여기서,  $T$ : 비트지속시간

# 대역통과 디지털 변조



# 대역통과 디지털 변조

- OQPSK



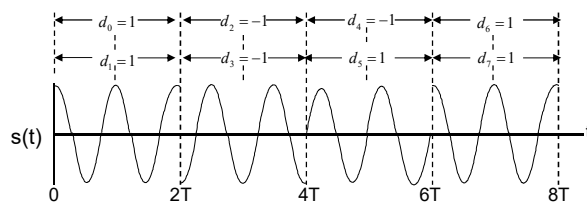
OQPSK 데이터 스트림

## 대역통과 디지털 변조

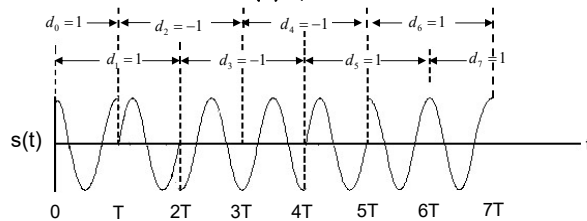
- 180° 반송파 위상 변화가 배제됨
- 위상 변화는 매  $T$  초 마다 0°, 90° 로 제한됨
- 진폭 변화가 QPSK보다 작음

## 대역통과 디지털 변조

- QPSK와 OQPSK의 신호파형



(a) QPSK

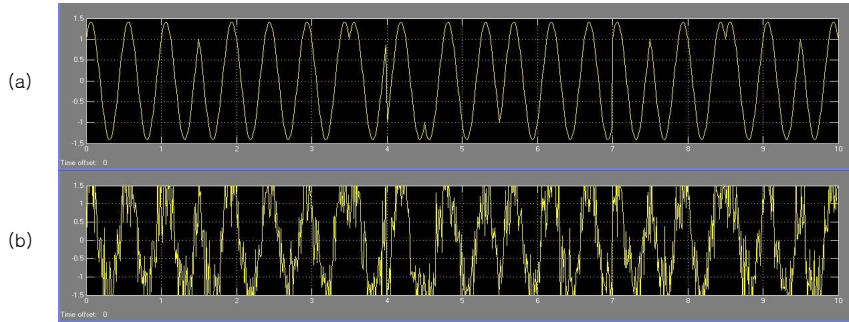


(b) OQPSK



## 대역통과 디지털 변조

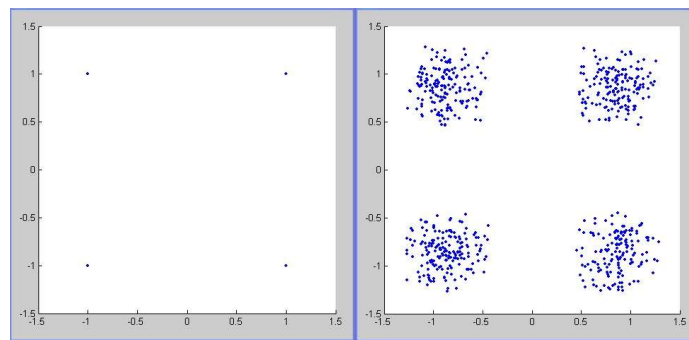
- OQPSK 신호 특성
  - 신호 파형



OQPSK 신호파형 (a)송신부 (b)수신부

## 대역통과 디지털 변조

- 신호점 성상도

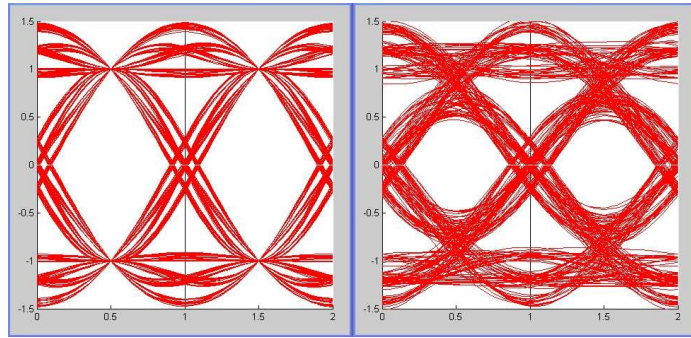


송신부

수신부

## 대역통과 디지털 변조

- 아이 패턴

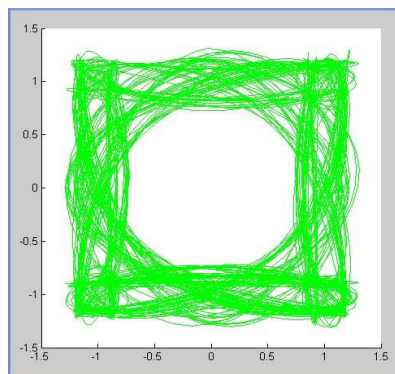


송신부

수신부

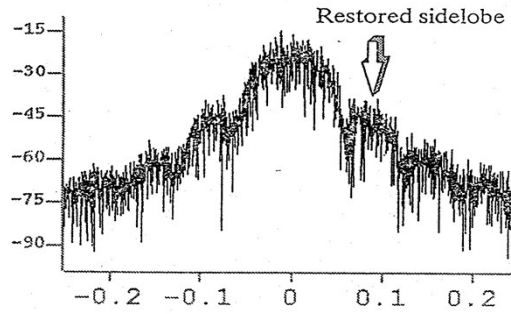
## 대역통과 디지털 변조

- 공간 다이어그램



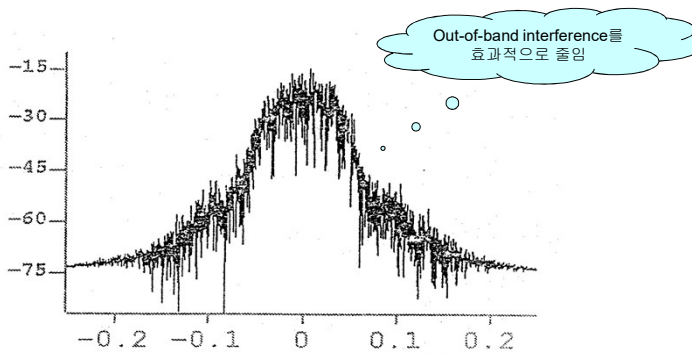
## 대역통과 디지털 변조

- QPSK 신호의 문제점
  - 전력 증폭기의 비선형 영역에서 부엽(sidelobe) 다시 증가



QPSK 출력 스펙트럼

## 대역통과 디지털 변조



OQPSK 출력 스펙트럼

## 대역통과 디지털 변조

### □ 최소 천이 키잉 (MSK: minimum shift keying): 9.8.2절

- 연속 위상 주파수 천이 키잉(CPFSK)의 특별한 경우
- 정현 심볼 가중치를 가지는 OQPSK의 특별한 경우

$$s(t) = \cos \left[ 2\pi \left( f_0 + \frac{d_k}{4T} \right) t + x_k \right], \quad kT < t < (k+1)T \quad (9.46)$$

Phase of the waveform should be continuous at  $t=kT$  for  $d_k = \pm 1$

$$x_k = \left[ x_{k-1} + \frac{\pi k}{2} (d_{k-1} - d_k) \right] \text{ modulo } 2\pi \quad \leftarrow x_k = 0 \text{ or } \pi \text{ during each } T\text{-second}$$

Equation (9.46) becomes

$$s(t) = a_k \cos \frac{\pi t}{2T} \cos 2\pi f_0 t - b_k \sin \frac{\pi t}{2T} \sin 2\pi f_0 t, \quad kT < t < (k+1)T$$

where

$$a_k = \cos x_k = \pm 1, \quad b_k = d_k \cos x_k = \pm 1$$

## 대역통과 디지털 변조

### □ MSK (cont'd)

$$s(t) = [d_I(t) \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_0 t) + d_Q(t) \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_0 t)], \quad kT < t < (k+1)T$$

여기서,  $d_I$  와  $d_Q$  는 2진 데이터 신호  
 $2T$ 는 심볼 지속 시간,  $\omega_1 = \frac{\pi}{2T}$

$$\rightarrow s(t) = \cos(\omega_0 t + a_k \frac{\pi t}{2T} + \phi_k)$$

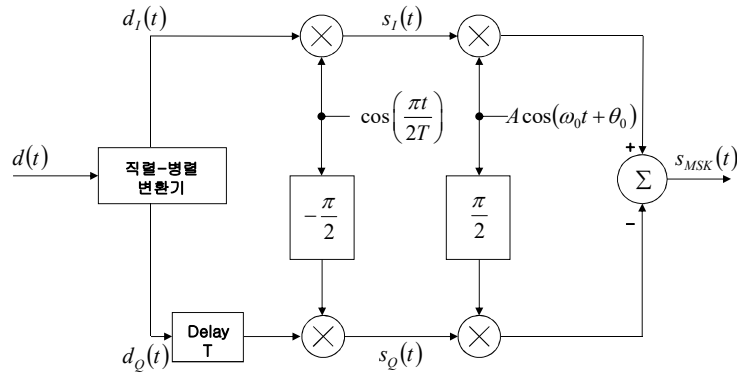
여기서,

$$a_k = \begin{cases} 1, & d_I \neq d_Q \\ -1, & d_I = d_Q \end{cases} \quad \phi_k = \begin{cases} 0, & d_I = 1 \\ \pi, & d_I = -1 \end{cases}$$

$$a_k \frac{\pi t}{2T} = \pm \frac{\pi t}{2T} : \text{초과 위상}$$

## 대역통과 디지털 변조

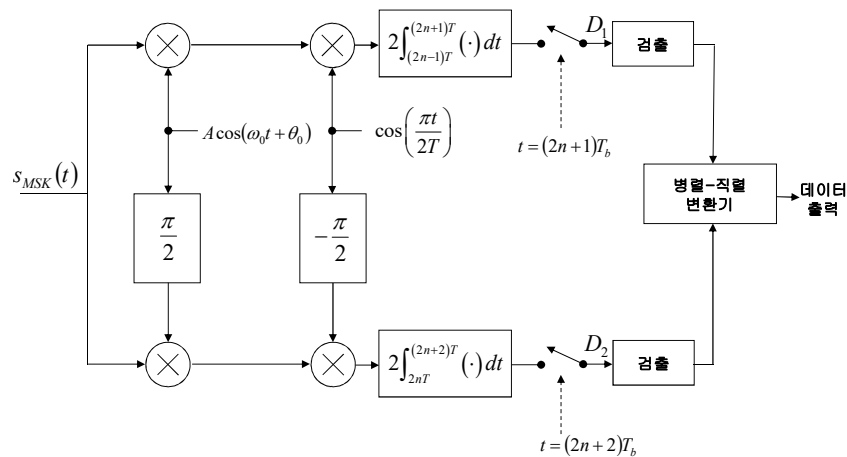
- MSK 변조기 구조



MSK 변조기

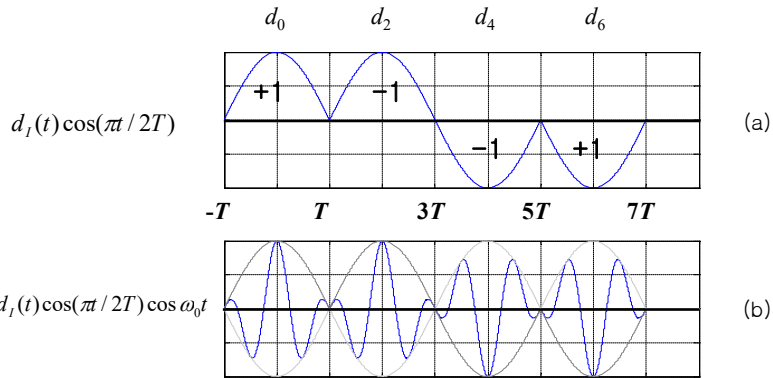
## 대역통과 디지털 변조

- MSK 복조기 구조



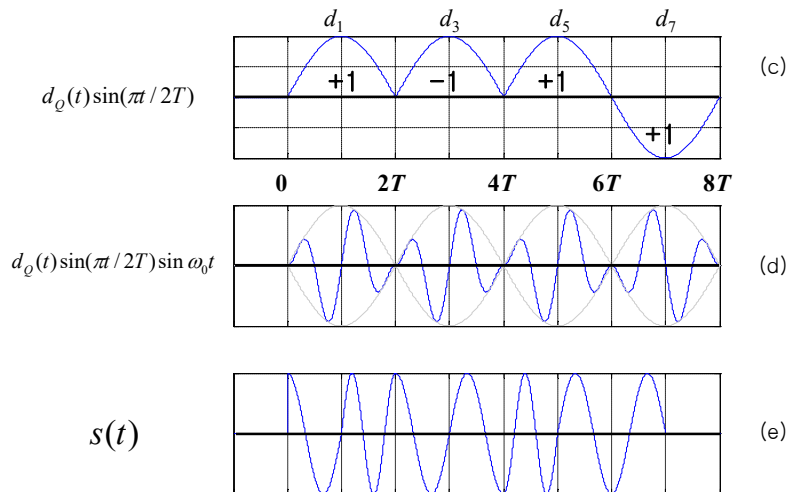
MSK 복조기

## 대역통과 디지털 변조



최소 편이 키잉(MSK)  
(a) 수정된 I 비트 스트림 (b) 반송파가 곁해진 I 비트 스트림

## 대역통과 디지털 변조



최소 편이 키잉(MSK)  
(c) 수정된 Q 비트 스트림 (d) 반송파가 곁해진 Q 비트 스트림 (e) MSK 파형

## 대역통과 디지털 변조

### □ MSK Modulation의 특징

- Waveform  $s(t)$  has constant envelope
- There is phase continuity in the RF carrier at the bit transitions
- 주파수편이 = 비트율의 1/2 ←  $\left(f_0 + \frac{1}{4T}\right) - \left(f_0 - \frac{1}{4T}\right) = \frac{1}{2T}$

Power spectral density for QPSK and OQPSK

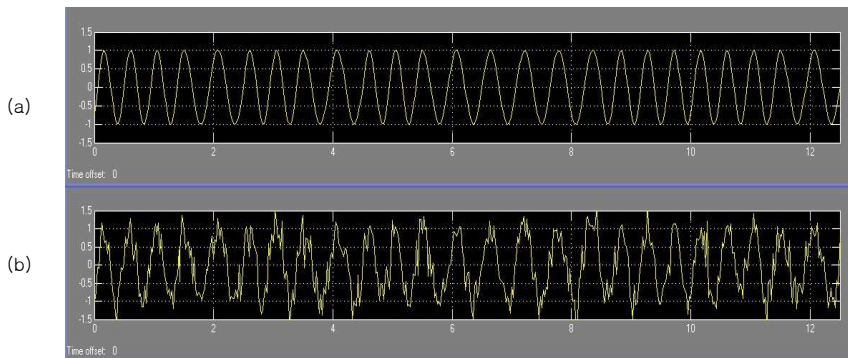
$$G(f) = 2PT \left( \frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} \right)^2$$

Power spectral density for MSK

$$G(f) = \frac{16PT}{\pi^2} \left( \frac{\cos 2\pi fT}{1 - 16f^2T^2} \right)^2$$

## 대역통과 디지털 변조

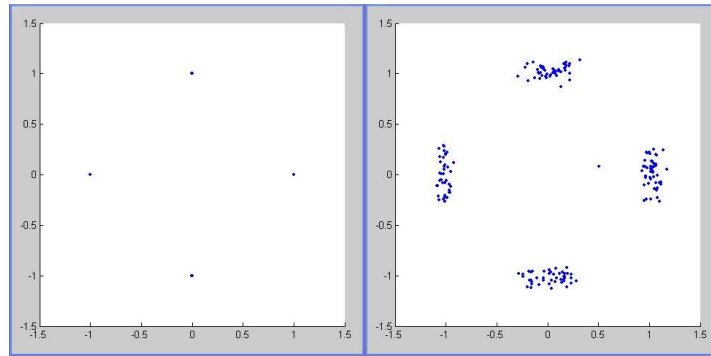
- MSK 신호 파형



MSK 신호파형 (a)송신부 (b)수신부

## 대역통과 디지털 변조

- 신호점 정상도

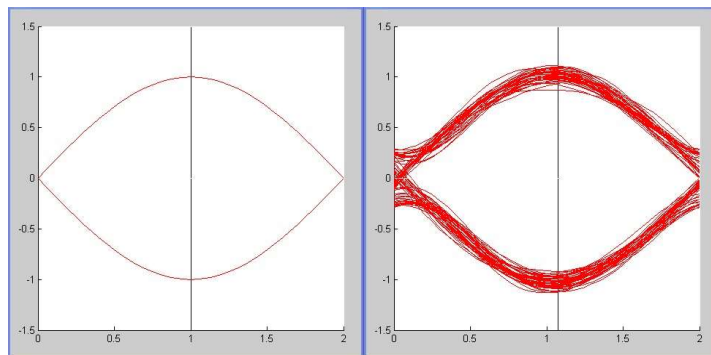


송신부

수신부

## 대역통과 디지털 변조

- 아이 패턴



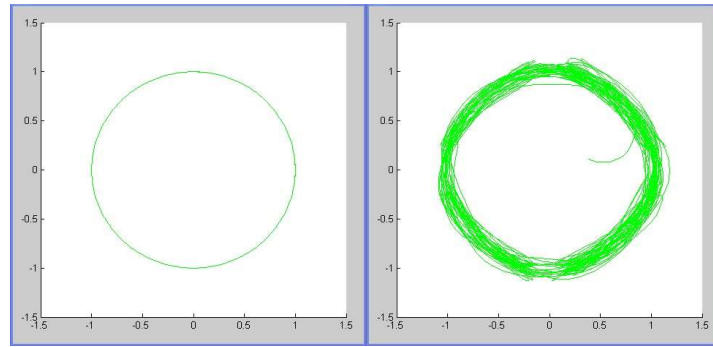
송신부

수신부



## 대역통과 디지털 변조

- 공간 다이어그램

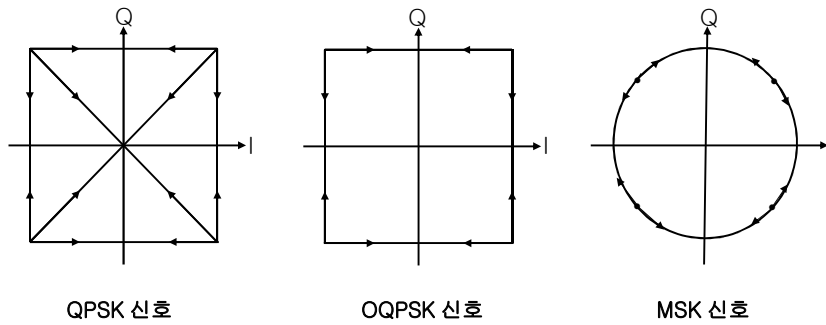


송신부

수신부

## 대역통과 디지털 변조

▪ 각 변조 방식의 공간 다이어그램



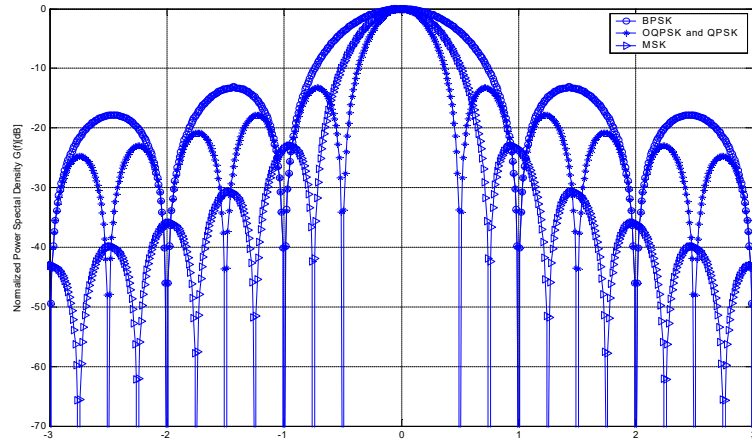
QPSK 신호

OQPSK 신호

MSK 신호

## 대역통과 디지털 변조

- 각 변조 방식의 정규화된 전력 스펙트럼 밀도



BPSK, QPSK, OQPSK, MSK 에 대한 정규화된 전력 스펙트럼 밀도

## 대역통과 디지털 변조

- BPSK의 대역폭 효율은 QPSK의 1/2
- MSK는 (O)QPSK 보다 더 낮은 부엽(sidelobe)을 가짐
- MSK 스펙트럼에서 주엽(mainlobe)은 (O)QPSK 보다 더 넓음

## 대역통과 디지털 변조

### 직교진폭변조(QAM: quadrature amplitude modulation)

- QPSK의 논리적인 확장
- 두 개의 독립적인 진폭 변조된 반송파로 구성
- QAM 신호

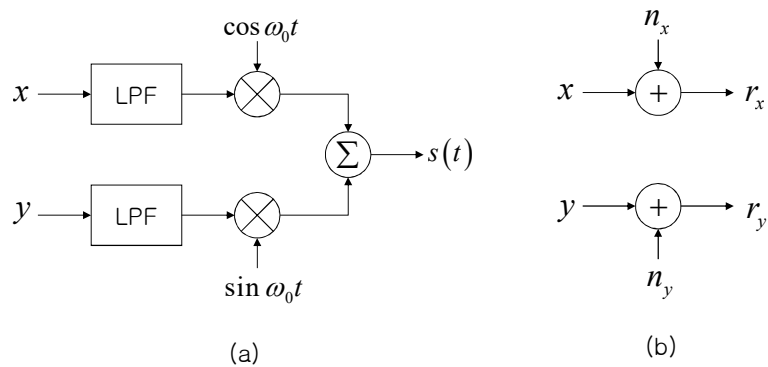
$$s_m(t) = \text{Re}[(A_{mc} + jA_{ms})g(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

$$= A_{mc}g(t)\cos 2\pi f_c t - A_{ms}g(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T$$

여기서,  $A_{mc}$  와  $A_{ms}$ 는 정보 신호 진폭  
 $g(t)$ 는 신호 펄스

## 대역통과 디지털 변조

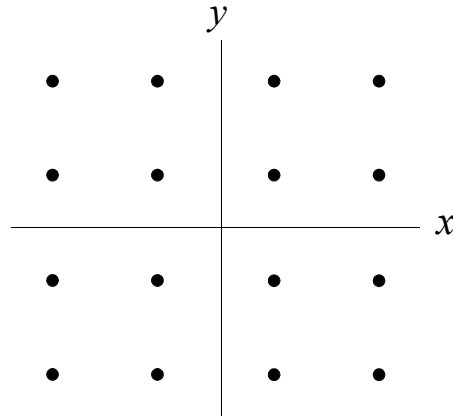


### QAM 변조

(a) QAM 변조기. (b) QAM 채널 모델

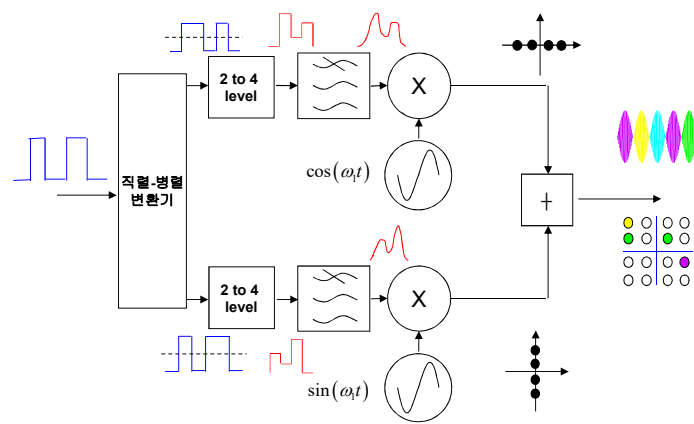
# 대역통과 디지털 변조

- 16-QAM



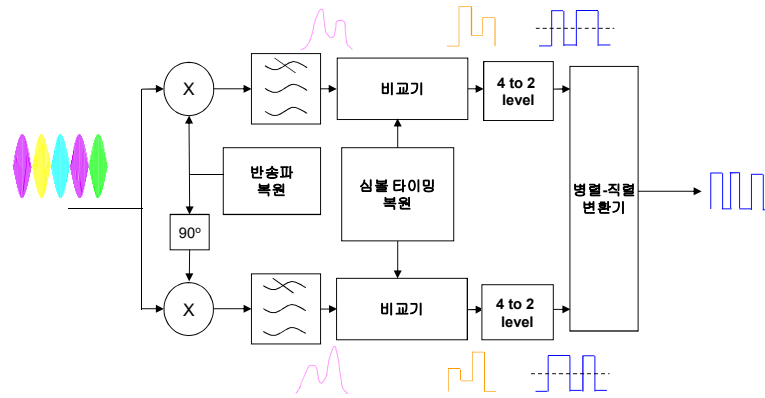
16-QAM의 신호점 성상도

# 대역통과 디지털 변조



16-QAM 변조기

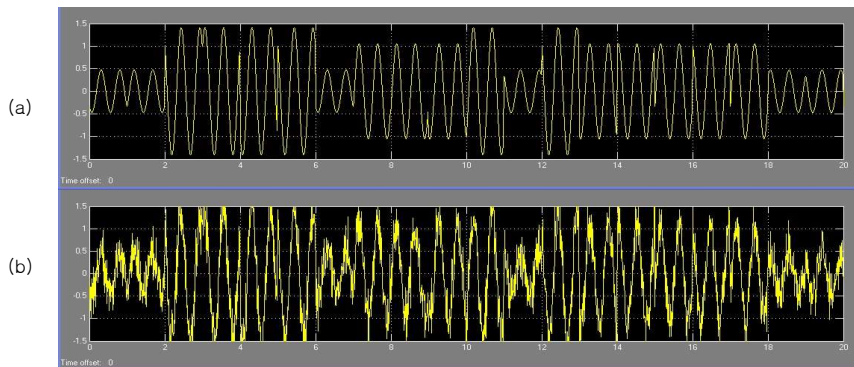
# 대역통과 디지털 변조



16-QAM 복조기

# 대역통과 디지털 변조

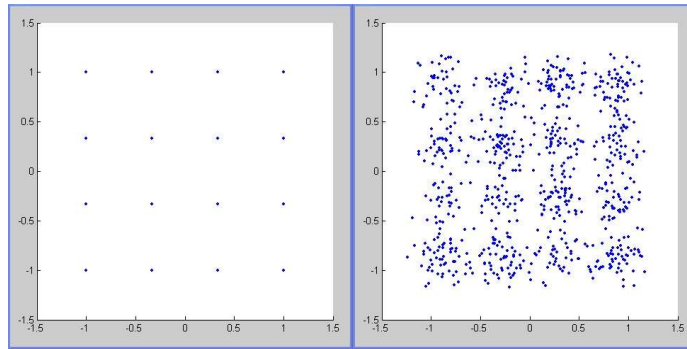
- 신호파형



16-QAM 신호파형 (a)송신부 (b)수신부

## 대역통과 디지털 변조

- 신호점 정상도

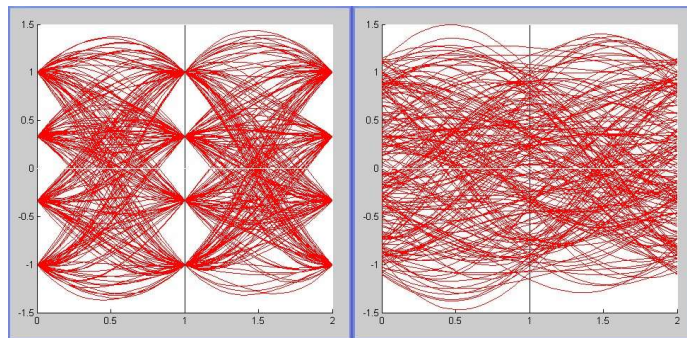


송신부

수신부

## 대역통과 디지털 변조

- 아이 패턴

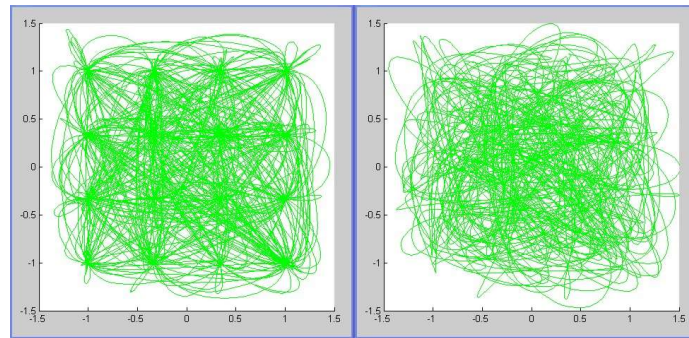


송신부

수신부

# 대역통과 디지털 변조

- 공간 다이어그램



송신부

수신부

# 대역통과 디지털 변조

□ 변조방식 별 오류성능 비교

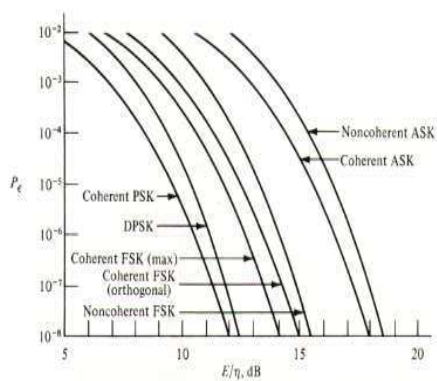


Figure 10.18 Error probabilities for binary digital modulation systems.

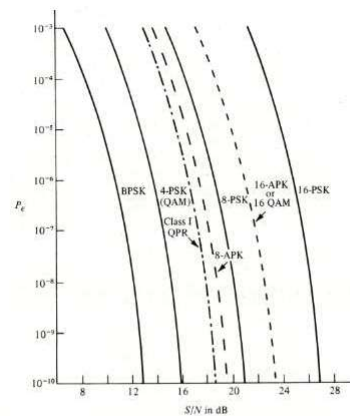


Figure 10.45 Probability-of-error performance of M-ary PSK, QAM, QPR, and M-ary APK coherent systems. The mean-square S/N is specified in the double-sided Nyquist bandwidth that equals the symbol-rate bandwidth.<sup>†</sup>

## 대역통과 디지털 변조

### □ 변조방식 별 구현 복잡도 비교

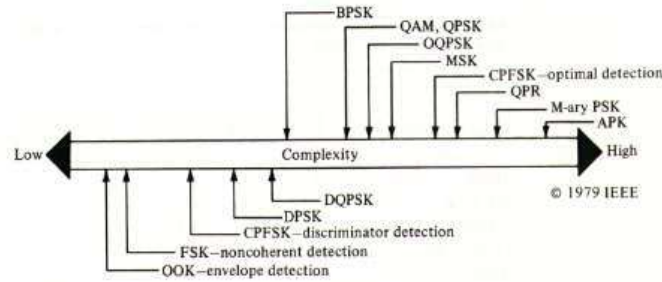


Figure 10.47 Relative complexity of representative modulation schemes.<sup>†</sup>

## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출

### □ 결정 규칙 (Decision Rule)

- $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) = \|\mathbf{r}, \mathbf{s}_i\|$  가 최소가 되도록 선택

여기서,  $\|\mathbf{x}\|$  : 벡터  $\mathbf{x}$ 의 크기

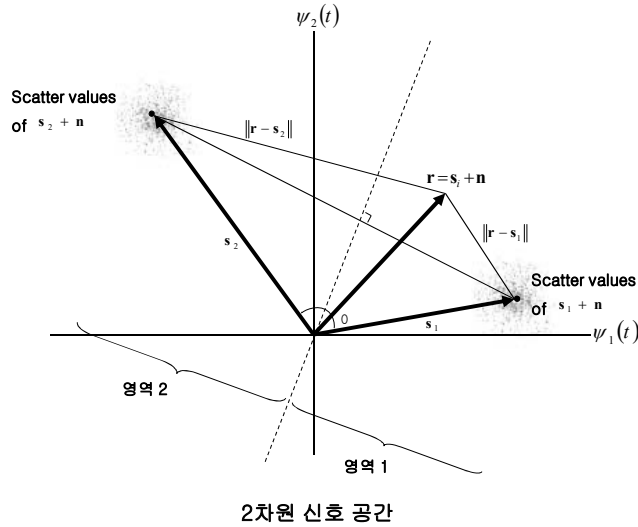
$\mathbf{r}$  : 수신 신호 벡터

$\mathbf{s}_i$  : 기준 신호 벡터

- $\mathbf{r}$  이  $i$  영역에 위치할 때,  $\mathbf{s}_i$  를 결정



## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출



## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출

### □ 상관 수신기

- 수신 신호

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$

여기서,  $n(t)$ : 가산성 백색 가우시안 잡음

$T$ : 심볼 지속시간

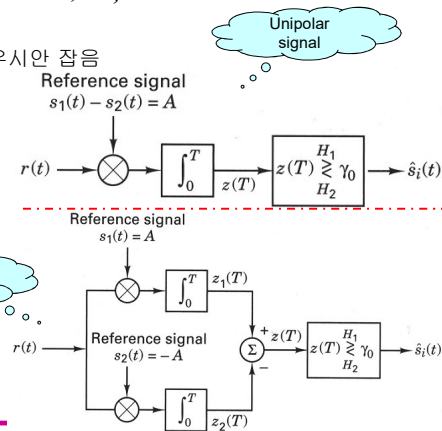
- 검출 과정

- 단계 1

$$\rightarrow r(t) \rightarrow z_i(T)$$

- 단계 2

$\rightarrow s_i(t)$  선택



## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출

- 상관 수신기

$$z_i(T) = \int_0^T r(t) s_i(t) dt$$

→ 최대  $z_i(T)$ 에 해당하는 지수를 가지고 있는  $s_i(t)$  선택

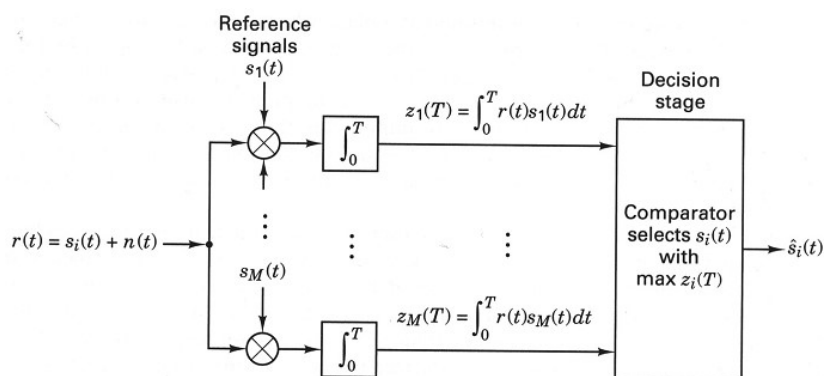
- 임의의 신호 집합  $\{s_i(t)\} (i=1, \dots, M)$  은 기저 함수들  $\{\psi_j(t)\} (j=1, \dots, N)$  의 집합으로 표현 가능 (여기서  $N \leq M$ )

→  $M$  개의 상관기의 열은  $N$  개의 상관기의 열로 대체

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \psi_j(t), \quad i=1, \dots, M; \quad N \leq M$$

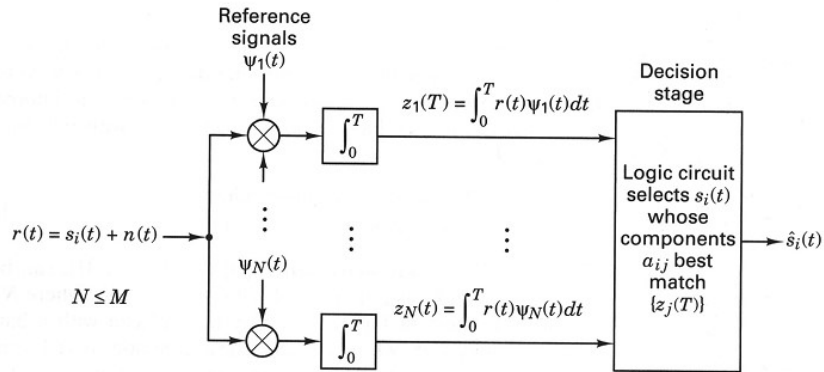
→ Choice of  $s_i(t)$  is made according to the best match of the coefficients,  $a_{ij}$

## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출



기준 신호로  $\{s_i(t)\}$ 를 갖는 상관기 수신기

## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출



기준 신호로  $\{\psi_j(t)\}$ 를 갖는 상관기 수신기

## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출

- 2진 신호 검출

-  $z(T) = z_1(T) - z_2(T)$  : 시험 통계 값

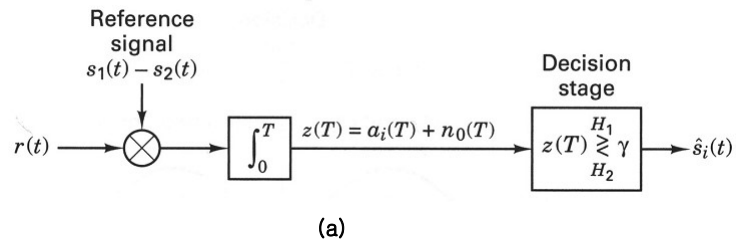
$z(T) = a_i(T) + n_o(T), i = 1, 2$  : For binary system

→  $n_o$  : 평균이 0 인 가우시안 랜덤 변수

$z(T)$  :  $a_j$ 의 평균을 갖는 가우시안 랜덤 변수

## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출

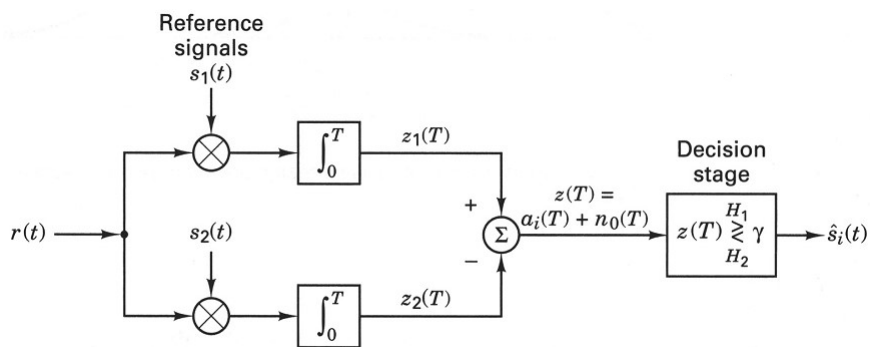
- 2진 상관기 수신기



2진 상관기 수신기

(a) 하나의 상관기를 사용하는 경우

## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출



2진 상관기 수신기

(b) 두 개의 상관기를 사용하는 경우

## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출

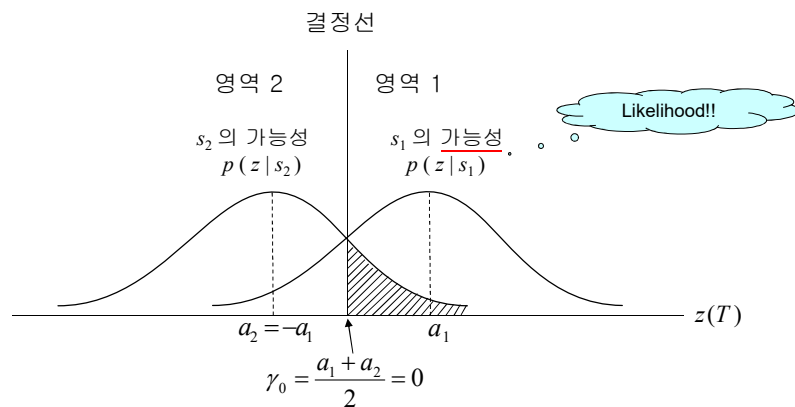
- 2진 신호 결정 임계값
  - 조건부 확률밀도 함수 (PDF)

$$p(z | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left[-\frac{(z - a_1)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

$$p(z | s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left[-\frac{(z - a_2)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

여기서,  $a_i$ : 평균  
 $\sigma_0^2$ : 분산

## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출



## 가우시안 잡음환경에서의 신호 검출

- 최적의 임계값

- 신호의 발생 확률이 동일하고, 채널이 대칭일 때, 최적 임계치

$$\rightarrow \gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

- 만약  $z(T) > \gamma_0$ ,  $s_1(t)$  결정

- 만약  $z(T) < \gamma_0$ ,  $s_2(t)$  결정

- $z(T) = \gamma_0$  일 경우, 두 값 중 하나를 임의로 결정

- 에너지가 같고 발생 확률이 동일한 대척 신호들 (antipodal signal)

$$s_1(t) = -s_2(t), \quad a_1 = -a_2$$

$$\rightarrow \gamma_0 = 0$$

$$z(T) \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \gamma_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Decide } s_1(t) & \text{if } z_1(T) > z_2(T) \\ \text{Decide } s_2(t) & \text{otherwise} \end{cases}$$

## 동기 및 비동기 검출

- Coherent detection of PSK

- 2진 PSK (BPSK)

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_2(t) = -\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t \quad \text{for } 0 \leq t \leq T$$

$$s_1(t) = a_{11} \psi_1(t) = \sqrt{E} \psi_1(t)$$

$$s_2(t) = a_{21} \psi_1(t) = -\sqrt{E} \psi_1(t)$$

## 동기 및 비동기 검출

□ BPSK (cont'd)

Expected values of the correlator receiver with  $\psi_1(t)$  for Fig 4.7b (교안 275p)

$$E[z_1 | s_1] = E\left[\int_0^T \left\{ \sqrt{E}(\psi_1(t))^2 + n(t)\psi_1(t) \right\} dt\right]$$

$$= E\left[\int_0^T \left\{ \frac{2}{T} \sqrt{E} \cos^2 \omega_0 t + n(t) \frac{2}{T} \cos \omega_0 t \right\} dt\right] = \sqrt{E} \quad \text{Choose!!}$$

$$E[z_2 | s_2] = E\left[\int_0^T \left\{ -\sqrt{E}(\psi_1(t))^2 + n(t)\psi_1(t) \right\} dt\right]$$

$$= E\left[\int_0^T \left\{ -\frac{2}{T} \sqrt{E} \cos^2 \omega_0 t + n(t) \frac{2}{T} \cos \omega_0 t \right\} dt\right] = -\sqrt{E}$$

Decision stage of correlator receiver chooses the signal with the largest value of  $z_i(T)$

## 동기 및 비동기 검출

□ MPSK의 동기 검출 . . . Coherent or Synchronous

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi i}{M}\right), i = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t, \quad \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_0 t$$

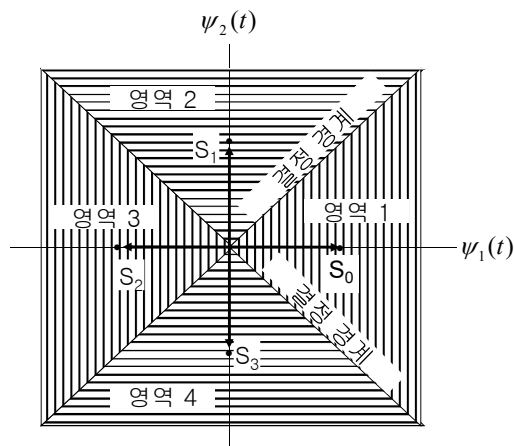
- E 는 각 심볼지속시간 T 동안의 에너지

## 동기 및 비동기 검출

$$\begin{aligned}
 s_i(t) &= a_{i1}\psi_1(t) + a_{i2}\psi_2(t) \\
 &= \sqrt{E} \cos\left(\frac{2\pi i}{M}\right)\psi_1(t) + \sqrt{E} \sin\left(\frac{2\pi i}{M}\right)\psi_2(t) \\
 0 \leq t \leq T, \quad i &= 0, \dots, M-1
 \end{aligned}$$

- $M=4$  (QPSK) 인 경우, MPSK 신호 집합들 중 유일하게 파형 집합이 대척(antipodal)과 직교(orthogonal) 멤버들의 조합으로 표현
- 결정 경계들은 신호 공간을  $M=4$  인 지역들로 분리

## 동기 및 비동기 검출



M=4일 때 신호 공간과 결정 영역



## 동기 및 비동기 검출

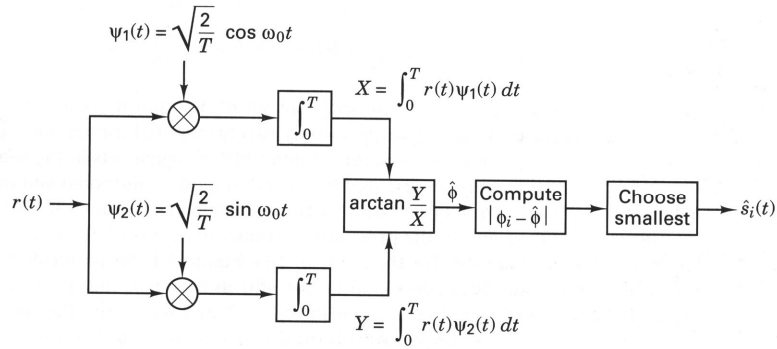


Figure 4.12 Demodulator for MPSK signals.

### MPSK 복조기

## 동기 및 비동기 검출

- 수신 신호

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \left( \cos \frac{2\pi i}{M} \cos \omega_0 t + \sin \frac{2\pi i}{M} \sin \omega_0 t \right) + n(t)$$

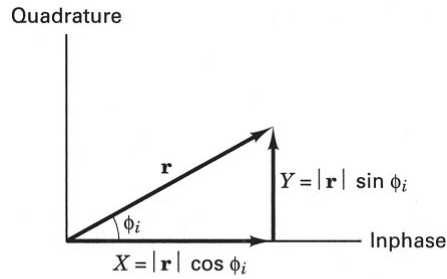
- 상위 부분

$$X = \int_0^T r(t) \psi_1(t) dt$$

- 하위 부분

$$Y = \int_0^T r(t) \psi_2(t) dt$$

## 동기 및 비동기 검출



$$\hat{\phi} = \arctan(Y/X) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Noisy estimate} \\ \text{of transmitted } \phi_i \end{array} \right.$$

- 변조기는  $\phi_i$ 에 대해  $|\phi_i - \hat{\phi}|$ 를 계산하여 가장 작은 출력을 만드는  $\phi_i$ 를 선택

## 동기 및 비동기 검출

### □ FSK의 동기 검출 . . .

Coherent or Synchronous

- FSK 신호 파형

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} (\cos \omega_i t + \phi)$$

- 단위 직교(orthonormal) 집합

$$\psi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_j t$$

$$a_{ij} = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega_i t \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_j t dt = \begin{cases} \sqrt{E} & , \quad i = j \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

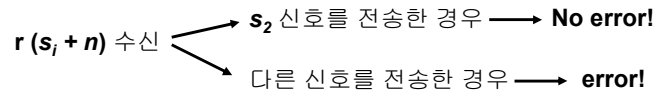
- 신호파형 개수만큼의 단위 직교함수가 요구됨

## 동기 및 비동기 검출

- 두 신호벡터 사이의 거리

$$d(s_i, s_j) = \|s_i - s_j\| = \sqrt{2E}, \quad i \neq j$$

- 결정 경계는 평면으로 표현
- 결정 경계는 평면으로 표현
- 최적의 결정 규칙은 수신된 신호가 들어있는 결정영역에 해당하는 지수의 클래스에 전송된 신호가 속하는지를 결정



## 동기 및 비동기 검출

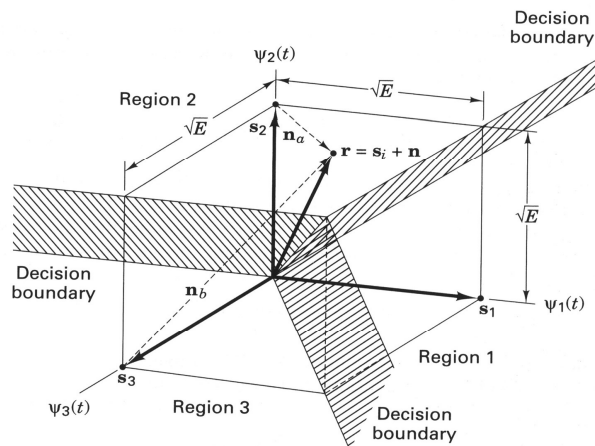


Figure 4.14 Partitioning the signal space for a 3-ary FSK signal.  
3진 FSK 신호에 대한 신호 공간의 분할

## 동기 및 비동기 검출

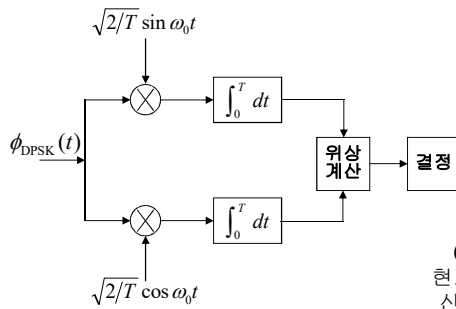
### □ 차등 PSK의 검출 (비동기 검출)

- 수신된 반송파의 **위상 기준을 필요로 하지 않음**
- 이전 신호화 구간에서의 반송파 위상을 **복조를 위한 위상 기준으로** 사용
- 연속되는 두 신호의 위상 차를 검출
- 송신기에서 **차등 부호화**가 요구됨

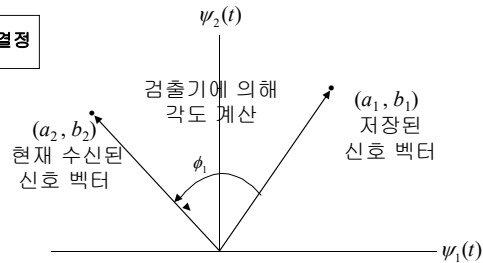


## 동기 및 비동기 검출

일반적인 Coherent detection의 경우



동기식 복조기



DPSK의 신호공간

## 동기 및 비동기 검출

- 차등 PSK (DPSK) 의 인코딩

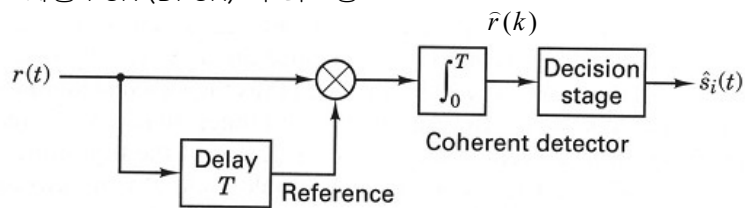
표본 지수, $k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
정보 메시지		1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
차등 부호 메시지 $c(k)$	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
위상 변이값, $\theta(k)$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	0	0	$\pi$	$\pi$	$\pi$	0	$\pi$	$\pi$

$$c(k) = c(k-1) \oplus m(k) \text{ or } c(k) = c(k-1) \bar{\oplus} m(k)$$

차등 부호화

## 동기 및 비동기 검출

- 차등 PSK (DPSK) 의 디코딩



$$\hat{r}(k) = \int_0^T \left\{ \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_c t + \theta(k)) \cdot \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_c t + \theta(k-1)) \right\} dt$$

$$= \begin{cases} E & \hat{m}(k) = 1 \\ -E & \hat{m}(k) = 0 \end{cases}$$

검출된 메시지,  $\hat{m}(k)$     1 1 0 1 0 1 1 0 0 1

차등 검출기

## 동기 및 비동기 검출

- PSK와 DPSK 수신기의 차이
  - PSK는 기준신호와 Correlation
  - DPSK는 이전신호와 Correlation 수행
- DPSK 수신기의 단점
  - Errors tend to **propagate** to adjacent symbol times
- DPSK 수신기의 성능
  - Approximately two times (3dB) worse than PSK
- DPSK 수신기의 장점
  - Reduced system complexity

## 동기 및 비동기 검출

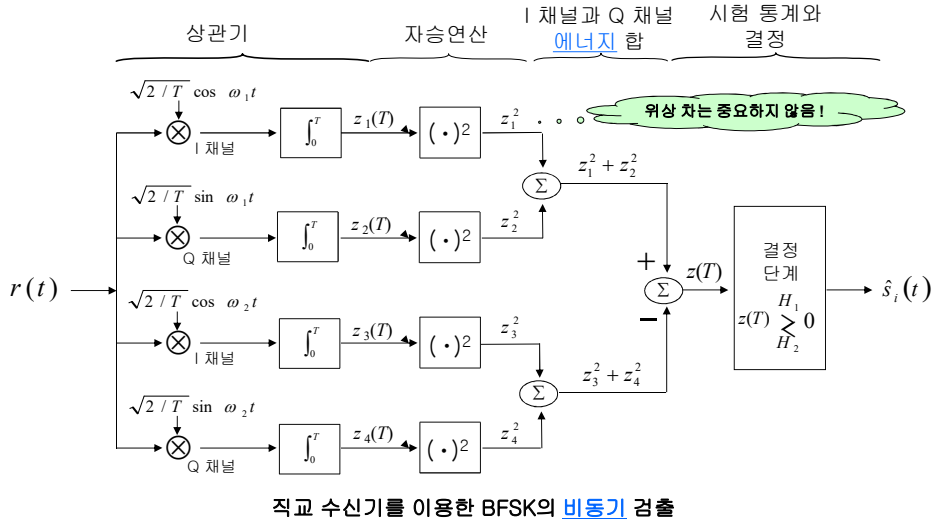
### □ FSK의 비동기 검출

- FSK 신호

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \phi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$

- 비동기 BFSK
  - 적교 수신기(Quadrature receiver)의 경우 일반적으로 동기 검출기보다 **두 배 많은 검출 과정**을 필요

## 동기 및 비동기 검출



## 동기 및 비동기 검출

Operation of non-coherent BFSK Demodulator

$$z_1(T) = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_1 t + \phi) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_1 t dt = \frac{\sqrt{E}}{T} \int_0^T \{\cos(2\omega_1 t + \phi) + \cos \phi\} dt$$

$$= \sqrt{E} \cos \phi$$

$$z_2(T) = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_1 t + \phi) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_1 t dt = \frac{\sqrt{E}}{T} \int_0^T \{\sin(2\omega_1 t + \phi) + \sin \phi\} dt$$

$$= \sqrt{E} \sin \phi$$

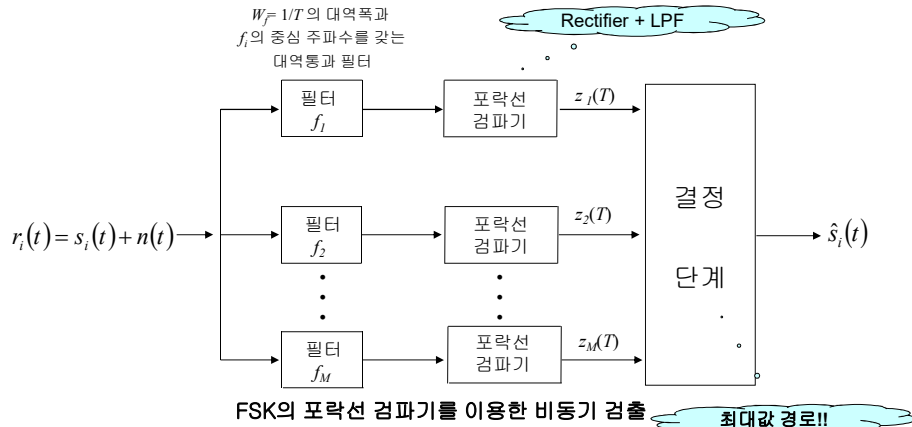
Thus,  $z_1^2 + z_2^2 = E \cos^2 \phi + E \sin^2 \phi = E$  . . .

출력이 위상차(φ)에 무관

When  $\omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow z_3(T) = z_4(T) = 0$

## 동기 및 비동기 검출

- 포락선 검파기를 이용한 비동기 MFSK 검출



## 동기 및 비동기 검출

- 검파기는 신호 자체에 정합되지 않고 신호의 포락선에 정합
- 위상 정보 필요치 않음
- Envelope detector는 Analog Filter로 디지털방식으로 구현하려면 discrete Fourier Transform을 사용 → Cost가 증가
- Quadrature receiver는 LSI로 저렴하게 구현가능
- 따라서 포락선검파기 방법이 Quadrature receiver보다 구현측면에서 더 복잡



## 동기 및 비동기 검출

□ 직교 FSK 신호화에서 요구되는 톤 간격(Example 4.3)

- 비동기 직교 FSK의 최소 요구 톤 간격

$$f_1 - f_2 = \frac{1}{T} \text{ Hz}$$

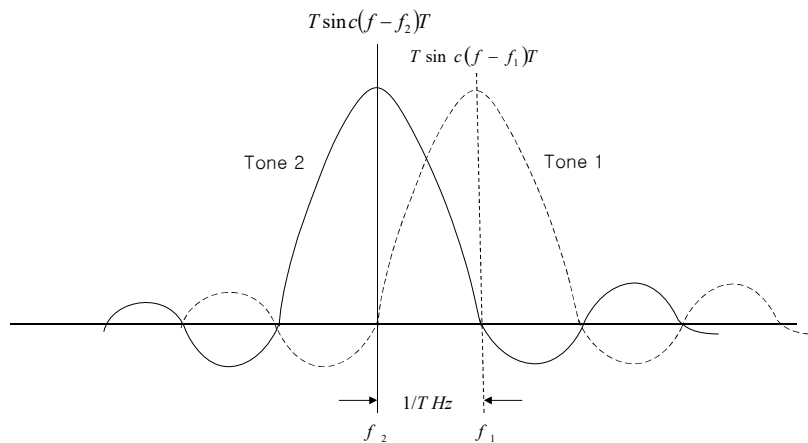
Example 4.3참조

- 동기 직교 FSK에서의 최소 요구 톤 간격

$$f_1 - f_2 = \frac{1}{2T} \text{ Hz}$$

- Coherent FSK is more *bandwidth efficient*

## 동기 및 비동기 검출



직교 FSK 신호화의 비동기 검출을 위한 최소 톤 간격

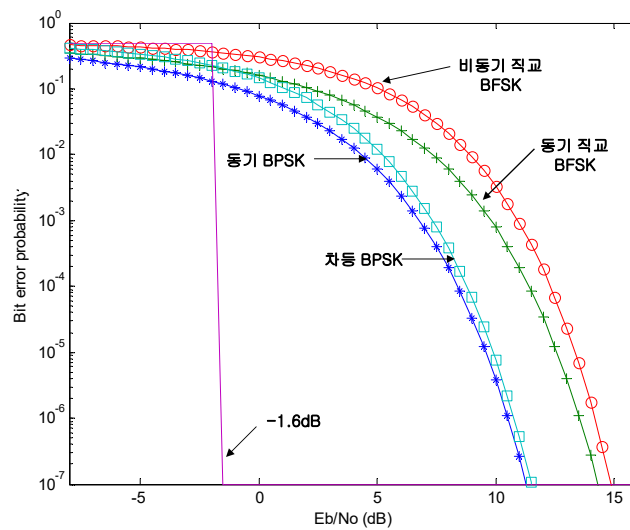
## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- Binary Modulation 기법의 성능 비교

**TABLE 4.1** Probability of Error for Selected Binary Modulation Schemes

Modulation	$P_B$
PSK (coherent)	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$
DPSK (differentially coherent)	$\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$
Orthogonal FSK (coherent)	$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
Orthogonal FSK (noncoherent)	$\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{E_b}{N_0}\right)$

## 비트 오류 및 심볼 오류 성능



## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

### □ Shannon 정리

- Shannon 제 1정리

If the entropy rate  $R$  is equal to or less than the channel capacity  $C$ , then there exists a **coding technique** that enables transmission over the channel with an arbitrarily small frequency of errors.

$$R \leq C$$

- Shannon 제 2정리 : Hartley-Shannon 정리

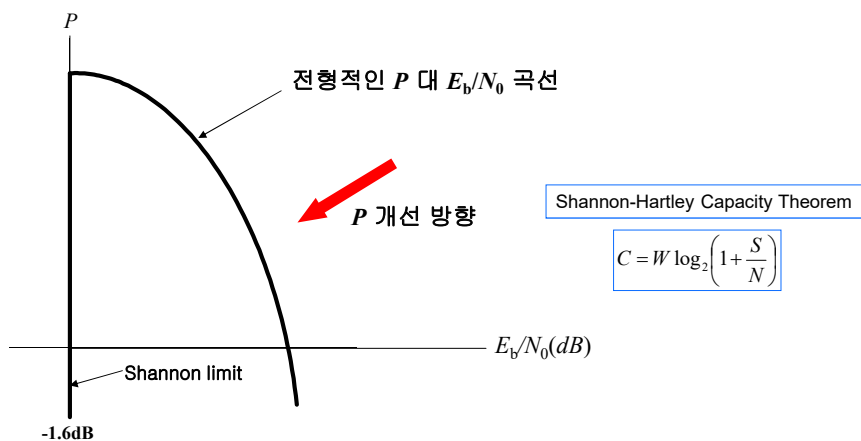
The **channel capacity** of a white band-limited Gaussian channel where  $B$  is the channel bandwidth and  $S/N$  is the mean-square signal-to-noise ratio becomes as following:

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

### □ M진 시스템의 오류확률

- 이상적인 오류 확률( $P$ ) 대  $E_b/N_0$  곡선



## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- $M$ 진 직교 신호화
  - $k$ 가 증가할수록 오류 성능 개선 방향
  - $k$ 가 증가할수록 필요 대역폭 증가
  
- $M$ 진 위상 신호화
  - $k$ 가 증가할수록 오류 성능 저하 방향
  - $k$ 가 증가할수록 필요 대역폭 감소(데이터 전송 속도 고정 시)

여기서,  $M = 2^k$

- 변복조 방식 선정기준
  - Error 성능
  - Complexity, bandwidth, throughput, cost 등을 고려하여 선정함.

## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

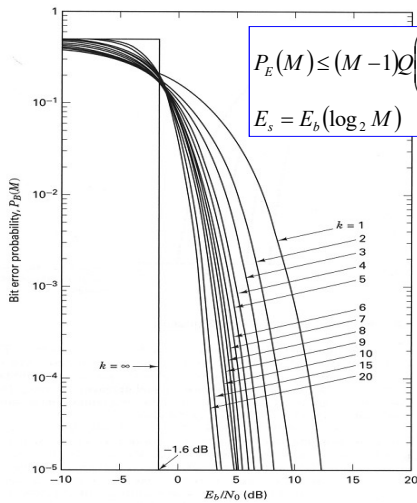


Fig. 4.28

Coherently detected M-ary orthogonal signaling

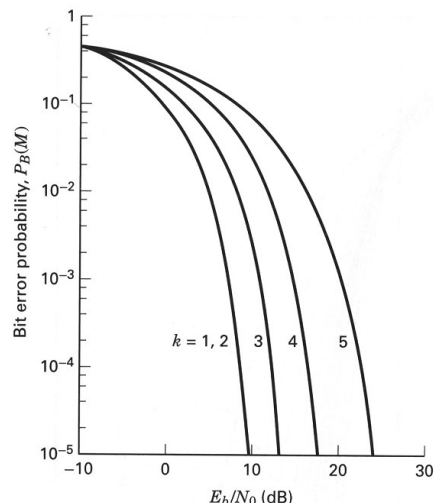
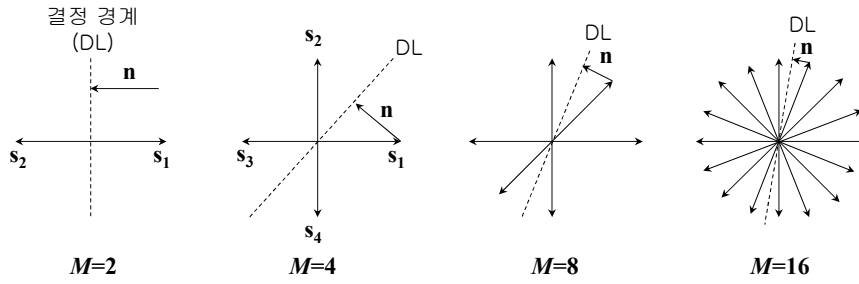


Fig. 4.29

Coherently detected multiple phase signaling

## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- 벡터 관점에서 본 MPSK 신호



## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- M진 시스템의 심볼오류확률

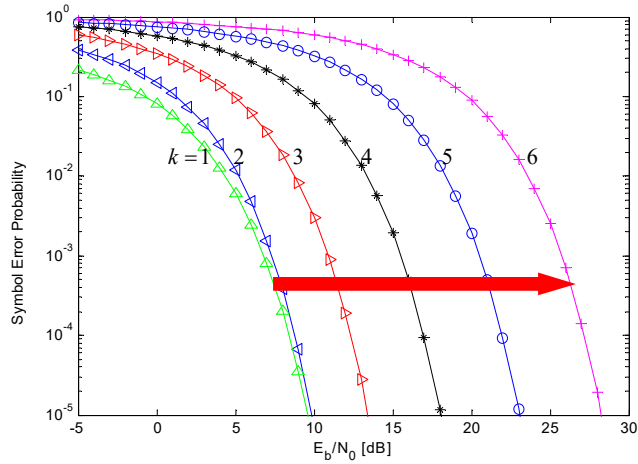
- 동기 MPSK의 심볼오류확률( $P_E(M)$ )

$$P_E(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0} \sin \frac{\pi}{M}}\right)$$

여기서,  $E_s = E_b (\log_2 M)$ ,  $M = 2^k$

## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- 동기 MPSK의 심볼오류확률



## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- 동기 MFSK의 심볼오류확률( $P_E(M)$ )

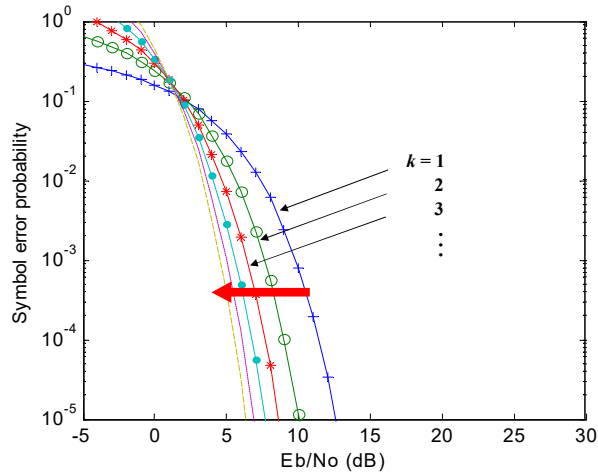
$$P_E(M) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ Q\left(-v - \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) \right]^{M-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv$$

$$\therefore P_E(M) \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

여기서,  $E_s = E_b(\log_2 M)$ ,  $M = 2^k$

## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- 동기 MFSK의 심볼오류확률



## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- 비동기 MFSK의 심볼오류확률( $P_E(M)$ )

$$P_E(M) = \frac{1}{M} \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right) \sum_{n=2}^M (-1)^n \binom{M}{n} \exp\left(\frac{E_s}{nN_0}\right)$$

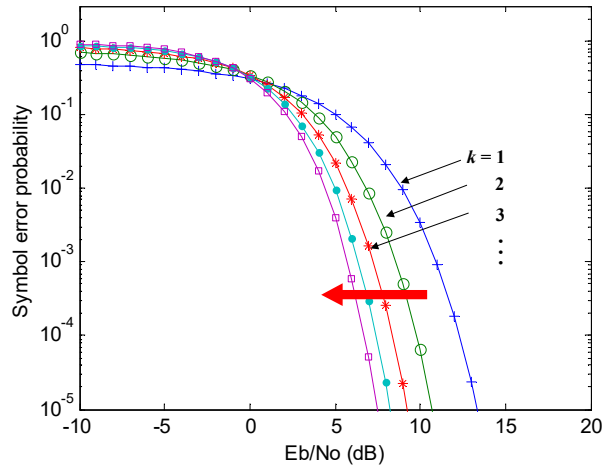
$$\therefore P_E(M) < \frac{M-1}{2} \exp\left(-\frac{E_s}{2N_0}\right)$$

여기서,  $\binom{M}{n} = \frac{M!}{n!(M-n)!}$

$$E_s = E_b (\log_2 M), \quad M = 2^k$$

## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- 비동기 MFSK의 심볼오류확률



## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- M-QAM의 심볼오류확률( $P_E(M)$ )

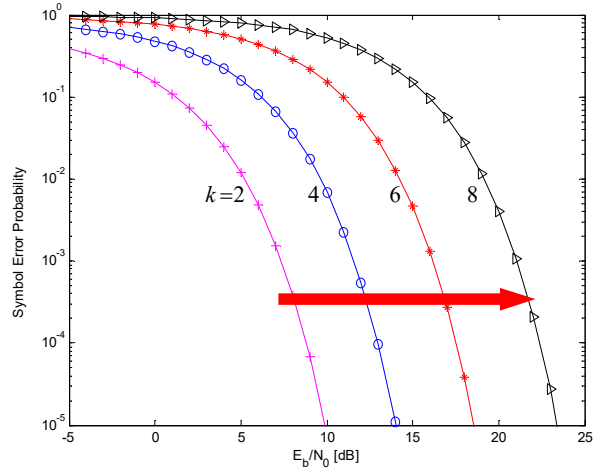
$$P_E(M) = 4 \left( \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \right) Q \left( \sqrt{\frac{3E_s}{N_0(M-1)}} \right) - 4 \left( \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \right)^2 Q^2 \left( \sqrt{\frac{3E_s}{N_0(M-1)}} \right)$$

여기서,  $E_s = E_b (\log_2 M)$ ,  $M = 2^k$



## 비트 오류 및 심볼 오류 성능

- M-QAM의 심볼오류확률



## 정보 이론

## 목차

---

- 정보란 무엇인가?
- Mutual Information
- 채널 용량
- Shannon's Theorem

## 정보(Information)란 무엇인가 ?

---

- Information
  - **Inversely** related to the probability of its occurrence
  - **The lower** the probability of a statement, **the greater** is the information conveyed by that statement

- Measure of information with an event A

- $P_A$  : probability of event A occurring

$$I_A = \log_a \frac{1}{P_A} = -\log_a P_A$$

- Standard is to use logarithm to the base 2

$$I_A = \log_2 \frac{1}{P_A} = -\log_2 P_A \text{ [bits]}$$

여기서,

$$\log_2 N = \log_{10} N / \log_{10} 2 \approx 3.322 \log_{10} N$$

## 정보(Information)란 무엇인가 ?

- 엔트로피 (평균 정보량), H

$$H \stackrel{\Delta}{=} E\{I_i\} = \sum_{i=1}^n P_i \log_2 \frac{1}{P_i} = -\sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i$$

- Binit (Binary digit) vs. bit

- Binit : Binary digit
- Bit : Measure of information
- When equi-probable event, the two definitions coincide

$$E\{I_i\} \leq I_{i|\max}$$

- When two successive symbols are independent

$$I_{AB} = -\log_2 P_{AB} = -\log_2 P_A \cdot P_B = -\log_2 P_A - \log_2 P_B = I_A + I_B$$

## 정보(Information)란 무엇인가 ?

- [EX. 1] For symbols A, B, C, D with prob. 1/2, 1/4, 1/8, 1/8. Compute information in the 3-symbol message  $X = BDA$  ? (Symbols are statistically independent)

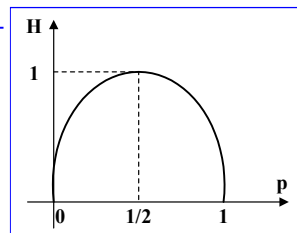
Independent → Additive !!

$$I_x = \log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 2 = 2 + 3 + 1 = 6 \text{ [bits]}$$

- [EX. 2] Relationship between H & probability where the probability of occurrence of the two symbols is  $p$ , and  $q = (1 - p)$ .

$$H = \sum_{i=1}^2 P_i \log_2 \frac{1}{P_i} = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \left( \frac{1}{1-p} \right)$$

$$\stackrel{\Delta}{=} H(p)$$



## 정보(Information)란 무엇인가 ?

- Information transfer rate (Entropy rate)

$$R = rH \text{ [bps]}$$

$r$  : symbol rate,  $H$  : entropy

- [Drill] Determine the entropy per symbol for (a) the four-symbol code in Example 1; (b) the case in which four symbols are equi-probable.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad H(X) &= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{8} \log_2 8 + \frac{1}{8} \log_2 8 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1.75 \text{ [bits]} \end{aligned}$$

- (b) Equiprobable  $\rightarrow p(x_i) = 1/4$

$$\begin{aligned} H(X) &= \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 \\ &= \log_2 2^2 = 2 \text{ [bits]} \end{aligned}$$

## Mutual Information

- Input and output entropy

- Notations

$x_i$  : input,  $y_j$  : output where  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$

- Definitions

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i); \quad H(Y) = -\sum_{j=1}^m p(y_j) \log_2 p(y_j)$$

- Conditional entropy

$$H(Y|x_i) = \sum_{j=1}^m p(y_j|x_i) H(y_j|x_i)$$

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^n H(Y|x_i) p(x_i)$$

$$= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i) p(y_j|x_i) \log_2 p(y_j|x_i) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j|x_i)$$

## Mutual Information

### □ Joint entropy

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i, y_j)$$

### □ Equivocation

$$H(X | y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i | y_j) I(x_i | y_j)$$

$$\begin{aligned} H(X | Y) &= \sum_{j=1}^m H(X | y_j) p(y_j) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(y_j) p(x_i | y_j) \log_2 p(x_i | y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i | y_j) \end{aligned}$$

## Mutual Information

### □ Relationship between $H(X, Y)$ and conditional entropy

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i, y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i | y_j) \cdot p(y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i | y_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i | y_j) - \sum_{j=1}^m p(y_j) \log_2 p(y_j) \\ &= H(X | Y) + H(Y) = H(Y | X) + H(X) \end{aligned}$$

## Mutual Information

- Mutual information or transformation
  - The **decrease** in the observer's average uncertainty of the transmitted signal when the output is received.

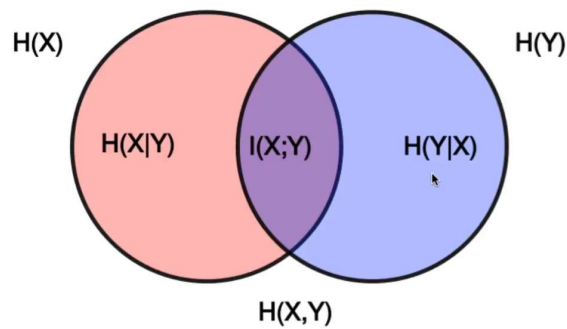
$$H(X|Y) \leq H(X)$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i | y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i | y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 \frac{p(x_i | y_j)}{p(x_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) \cdot p(y_j)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 \frac{p(y_j | x_i)}{p(y_j)} \end{aligned}$$

## Mutual Information

- Relationship btw Input, Output, Joint and Mutual



## 채널용량 (Channel Capacity)

- Channel capacity?

$$C = \max[I(X;Y)]$$

- [EX. 3] Determine the channel capacity for noiseless channel.

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i | y_j)$$

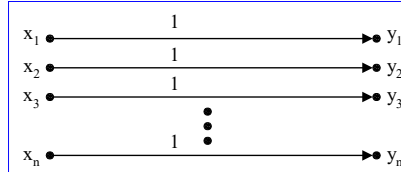
For noiseless channel

$$p(x_i | y_j) = \begin{cases} 0, & \text{for } i \neq j \\ 1, & \text{for } i = j \end{cases}$$

Because  $\log_2 1 = 0$  ( $\because \log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$ )  $\rightarrow H(X|Y) = 0$

$$I(X;Y) = H(X)$$

Entropy of a source is maximum if all source symbols are equally likely!



따라서 채널용량은,

$$\therefore C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log_2 n = \log_2 n \text{ [bps]}$$

## 채널용량 (Channel Capacity)

- [EX. 4] Determine the channel capacity for BSC (Binary Symmetric Channel).

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

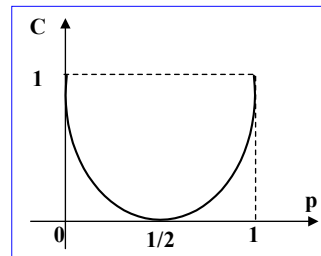
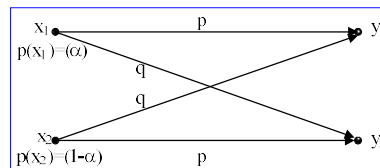
$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j | x_i)$$

$$\begin{aligned} &= -\alpha p \log_2 p - (1-\alpha)p \log_2 p \\ &\quad - \alpha q \log_2 q - (1-\alpha)q \log_2 q \\ &= -p \log_2 p - q \log_2 q \end{aligned}$$

$$I(X;Y) = H(Y) + p \log_2 p + q \log_2 q$$

$H(Y)$  is maximum when each output has a probability of  $1/2 \rightarrow H(Y) = 1$

$$C = 1 + p \log_2 p + q \log_2 q = 1 - H(p)$$



## 채널용량 (Channel Capacity)

- $p = 0$  or  $1$  : Channel output is completely determined by the channel input  $\rightarrow$  1 bit per symbol
- $p = 0.5$  : Channel capacity becomes zero

## Shannon's Theorem

### □ Shannon 제 1정리

*If the entropy rate  $R$  is equal to or less than the channel capacity  $C$ , then there exists a **coding technique** that enables transmission over the channel with an arbitrarily small frequency of errors.*

$$R \leq C$$

### □ Shannon 제 2정리 : Hartley-Shannon 정리

*The channel capacity of a white band-limited Gaussian channel where  $B$  is the channel bandwidth and  $S/N$  is the mean-square signal-to-noise ratio becomes as following:*

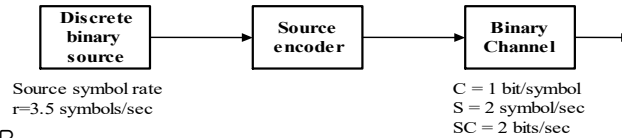
$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$



## Shannon's Theorem

### □ [EX. 5] (Example of source coding) : 제 1 정리

- Transmission scheme



- Source : A or B  
 $P(A)=0.9, P(B)=0.1$ , Symbol rate :  $r = 3.5$  symbols/sec
- Channel  
 Noiseless ( $p = 1$ )  $\rightarrow$  Channel capacity : 2 [symbol/sec]  
 : Source symbol rate > channel capacity  $\rightarrow$  전송 불가능!

- Source entropy

$$H(X) = -0.1 \log_2 0.1 - 0.9 \log_2 0.9 = 0.469 \text{ [bits/symbol]}$$

Source coding 기법?

- Source information rate

$$rH(X) = 3.5 \times 0.469 = 1.642 \text{ [bits/sec]} < SC \rightarrow$$

Source coding을 수행하면 채널로 전송 가능

## Shannon's Theorem

- $n$ th order extension coding scheme

*The shortest codeword is assigned to the most probable group of source symbols and the longest codeword is assigned to the least probable group of source symbols*

- The first-order extension

Source symbol	P()	Codeword	P() × (# of code symbols)
A	0.9	0	0.9
B	0.1	1	0.1

Code symbol의 평균길이:  $\bar{L} = 0.9 + 0.1 = 1.0$

$$\frac{\bar{L}}{n} = \frac{1}{1} = 1 \text{ [code symbol/source symbol]}; \quad r \times \frac{\bar{L}}{n} = 3.5 \text{ [code symbol/sec]} > SC$$

- The 2<sup>nd</sup> -order extension

Source symbol	P()	Codeword	P() × (# of code symbols)
AA	0.81	0	0.81
AB	0.09	10	0.18
BA	0.09	110	0.27
BB	0.01	111	0.03

## Shannon's Theorem

Code symbol의 평균길이:  $\bar{L} = 1.29$

$$\frac{\bar{L}}{n} = \frac{1.29}{2} = 0.645 [\text{code symbol/source symbol}];$$

$$r \times \frac{\bar{L}}{n} = 3.5 \times 0.645 = 2.258 [\text{code symbol/sec}] > SC$$

- The 3<sup>rd</sup> -order extension

Source symbol	P()	Codeword	P() × {# of code symbols}
AAA	0.729	0	0.729
AAB	0.081	100	0.243
ABA	0.081	101	0.243
BAA	0.081	110	0.243
ABB	0.009	11100	0.045
BAB	0.009	11101	0.045
BBA	0.009	11110	0.045
BBB	0.001	11111	0.005

Code symbol의 평균길이:  $\bar{L} = 1.598$

동일하게 3bit 할당한 경우 :  
3 bit

## Shannon's Theorem

$$\frac{\bar{L}}{n} = \frac{1.598}{3} = 0.533 [\text{code symbol/source symbol}];$$

$$r \times \frac{\bar{L}}{n} = 3.5 \times 0.533 = 1.864 [\text{code symbol/sec}] < SC \Rightarrow \text{Can be accepted by the channel}$$

- [EX. 6] (제 2정리 예제)

$$C = B \log_2(1 + S/N) [\text{bps}]$$

$W$  : Channel bandwidth

$S/N$  : Mean-square signal-to-noise ratio

- $S/N = 3, \rightarrow C = 2B; \quad S/N = 7, \rightarrow C = 3B$
- For a fixed channel capacity,  $W$  can be reduced in exchange for an increase in signal-to-noise ratio  $S/N$

- [EX. 7] (Black-and-white TV)

- Black-and-white TV frame
  - Frame rate : 30 [frames/sec]
  - Picture element (PE) per frame :  $3 \times 10^5$  [PE/frame]

## Shannon's Theorem

- Quantization level per PE : 10 [brightness level/PE]
- Required signal-to-noise ratio : 30 [dB]
- Calculate the minimum BW required to transmit the video signal.

$$S/N = 30[\text{dB}] \rightarrow 1000$$

$$\text{Information per PE} : \log_2 10 = 3.32 [\text{bits}]$$

$$\text{Information per picture frame} : 3.32 \times (3 \times 10^5) = 9.96 \times 10^5 [\text{bits}]$$

$$\text{Information rate} : R = 30 \times (9.96 \times 10^5) = 29.9 \times 10^6 [\text{bps}]$$

$$\therefore B_{\min} = \frac{R}{\log_2(1+1000)} \approx 3 [\text{MHz}]$$

## Shannon's Theorem

### □ [Drill] (G3 Fax machine)

- G3 Fax machine
  - 12 brightness level/picture element
  - $2.25 \times 10^6$  PE to be transmitted
  - Brightness levels are equi-probable
- Channels (Telephone line)
  - Bandwidth : 3 [kHz],  $S/N = 30$  [dB]  $\rightarrow 1000$
- What is the minimum time required for the facsimile transmission of one picture?

$$\text{Total bits to be transmitted} : \log_2 12 \times (2.25 \times 10^6) = 8.066 \times 10^6 [\text{bits}] = L$$

$$C = B \log_2(1 + S/N) = 3000 \times \log_2 1001 = 29.9 [\text{kbps}]$$

따라서  $L$ 을 전송하는데 소요되는 시간은

$$\frac{L}{C} = \frac{8.066 \times 10^6}{29.9 \times 10^3} \approx 270 [\text{sec}] = 4.5 [\text{min}]$$

---

# 채널 부호화

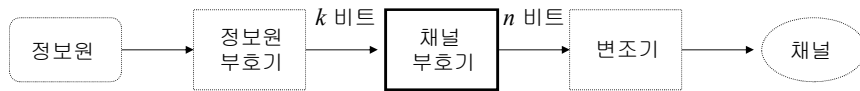
(6, 7, 8 장)

## 목차

---

- 채널 부호화
- 블록 부호
- 순회 부호
- 리드-솔로몬(R-S) 부호
- 길쌈 부호

## 채널 부호화 (Channel Coding)



- 채널에 의한 신호 성분 왜곡으로 인해 수신 단에서의 오류 발생
- 채널 부호화 : 제어된 리던던시(Redundancy)를 추가하여 채널 왜곡영향을 최소화시켜 성능 향상
- 부호율 :  $k/n$   
( $k$ : 부호화될 데이터 비트 ,  $n$ : 부호화된 출력 비트)

## 채널 부호화 (Channel Coding)

### □ Definition

- Class of signal transformation designed to improve communications performance by enabling the transmitted signals to better withstand the effects of various channel impairments

### □ Goals

- To reduce the probability of bit error
- To reduce the required  $E_b/N_0$  , at the cost of expending BW
- As much as 8 dB performance improvement with coding

## 채널 부호화

### □ 채널 용량

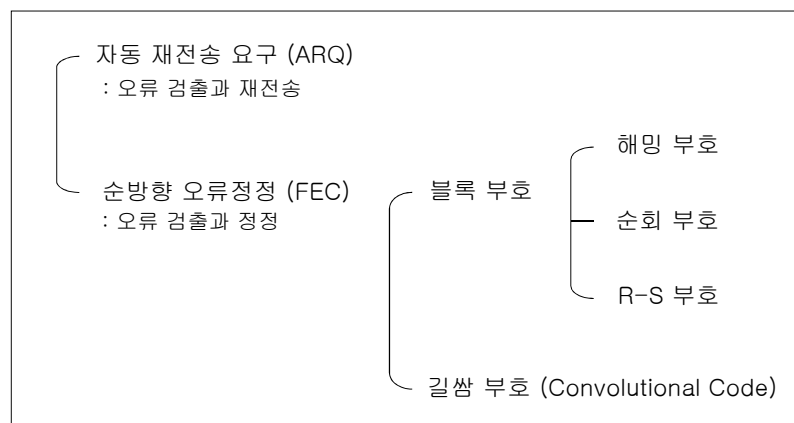
$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bits/sec} \quad (\text{Shannon-Hartley 정리})$$

( $C$ : 채널 용량,  $B$ : 대역폭,  $S/N$ : 신호 대 잡음비)

- $C \geq R$  을 만족하는 데이터는 채널 부호화를 통하여 신뢰성 있는 전송이 가능 (Shannon 정리)  
( $R$ : 정보원에서 출력 정보 비트율)

## 채널 부호화

### □ 분류



## 채널 부호화

### □ Types of error control

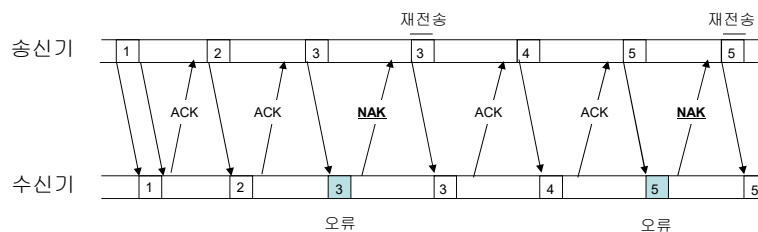
- Automatic repeat request (ARQ)
  - BEC (Backward error correction)
    - Two-way link is required
    - Error detection & retransmission using parity bit
    - Much simpler decoding equipment & much less redundancy
    - Stop & wait, go-back N, Selective repeat ARQ
  
- FEC (Forward Error Correction)
  - One-way link is required
  - Channel coding (ex. Hamming code, Cyclic code, R-S code, Convolutional coding etc)
  - More complex than ARQ

## 채널 부호화

### □ 자동 재전송 요구 (automatic repeat request: ARQ)

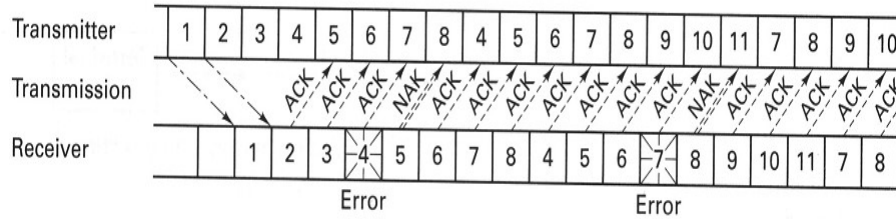
- 오류 검출 시, 송신기에 재전송을 요구

- 정지 대기 ARQ (stop-and-wait ARQ): 반 이중식 (Half duplex)



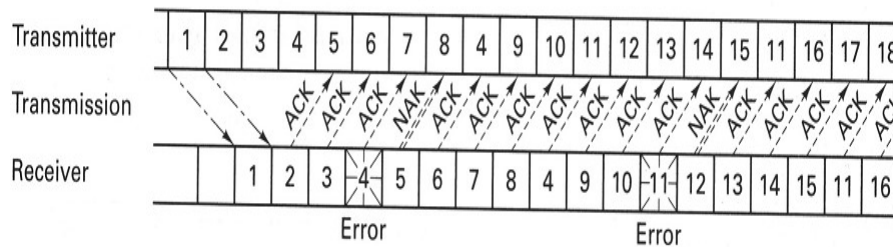
## 채널 부호화

- 후퇴 ARQ (continuous ARQ with Go-Back N): 전 이중식 (Full duplex)



## 채널 부호화

- 선택 재전송 ARQ (continuous ARQ with selective repeat)  
:전 이중 방식 (Full duplex)





## 채널 부호화

- 반 이중식 연결은 전 이중식 연결에 비해 비용이 저렴
- 전 이중식 연결이 반 이중식에 비해 통신자원을 효율적으로 사용
  - 비용과 효율성의 트레이드 오프
- 순방향 오류 정정(FEC)에 비해 ARQ는 복호기가 간단하고 리던던시 (redundancy)가 훨씬 적게 필요

## 채널 모델 (1)

### □ Discrete Memory-less Channel (DMC)

- Discrete input alphabet :  $(\bar{U} = u_1, u_2, \dots, u_N)$
- Discrete output alphabet :  $(\bar{Z} = z_1, z_2, \dots, z_N)$
- Conditional probability → Independent

$$P(Z|U) = \prod_{m=1}^N P(z_m | u_m)$$

### □ Memory channel

- Noise or fading that occurs in bursts
- Conditional probability → joint probability of all the elements

## 채널 모델 (2)

### □ Binary Symmetric Channel (BSC)

- A special case of a DMC
- Input & output alphabet sets consist of the binary (0 & 1)
- Conditional (transmission) probability

$$P(0|1) = P(1|0) = p$$

$$P(0|0) = P(1|1) = 1 - p$$

- Decoding with a BSC channel → *Hard-decision decoding*
  - To feed the two-valued symbols or channel bits to decoder
- Channel symbol error probability (coherent BPSK)

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_c}{N_0}}\right)$$

## 채널 모델 (3)

### □ Gaussian channel

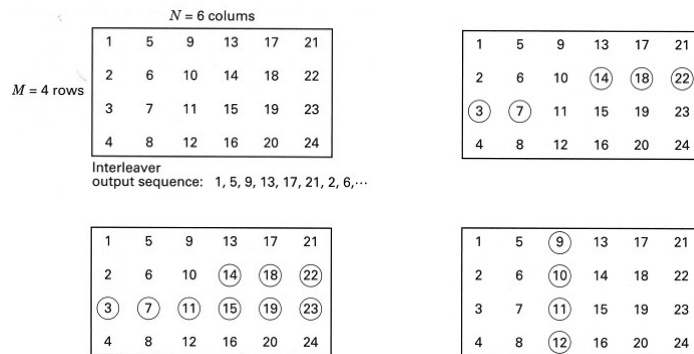
- Discrete input alphabet & a continuous output alphabet over  $(-\infty, \infty)$
- Conditional probability

$$P(z|u_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z-u_k)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- Channel noise is a Gaussian RV, with zero mean &  $\sigma^2$
- When memory-less → Product of each independent prob.
- *Soft-decision* decoding
  - When demodulator output consists of a continuous alphabet
  - No symbol error probability → Conditional probability

## Block Interleaving

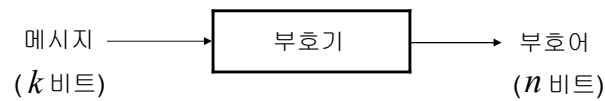
- Burst 오류를 Random 오류로 바꾸기 위해 사용
- RF로 전송하기에 앞서 데이터 시퀀스의 전송순서를 바꿈.



## 블록 부호

### □ $(n, k)$ 블록 부호

-  $k$  비트 메시지  $\longrightarrow$   $n$  비트 부호어 (codeword)



$$\text{부호화율} : \frac{k}{n}$$

$$2^k \text{ } k\text{-tuple message} \Rightarrow 2^n \text{ } n\text{-tuple message}$$

- 해밍 부호 (Hamming code)
- 순회 부호 (Cyclic code)
- R-S 부호 (Reed-Solomon code)

## 패리티 코드 (1)

### □ Single-parity-check code

- Constructed by adding a single-parity to a block of data
- Even parity & odd parity
- Code rate :  $k/(k+1)$
- To detect only the presence of odd number of bit errors
- Probability of  $j$  errors occurring in a block of  $n$  symbols

$$P(j, n) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

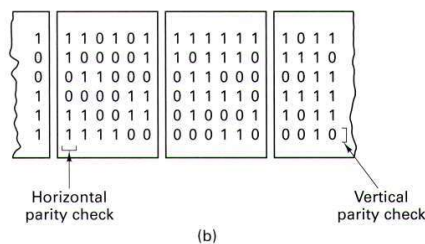
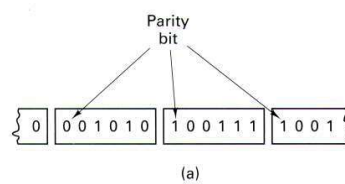
- Probability of undetected error

$$P_{nd} = \sum_{j=1}^{\substack{n/2 \text{ (for even)} \\ (n-1)/2 \text{ (for odd)}}} \binom{n}{2j} p^{2j} (1-p)^{n-2j}$$

where,  $p$  : prob. that a symbol is received in error

## 패리티 코드 (2)

### □ Example



## Parity Check Code (3)

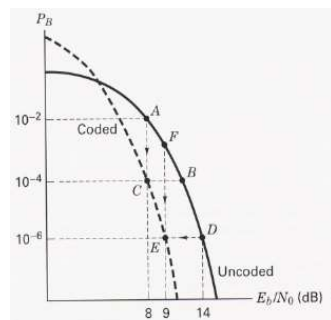
- Rectangular code ( or product code)
  - For  $M$  rows &  $N$  columns  $\rightarrow (M+1) \times (N+1)$  augmented array
  - Can correct a single error pattern
  - Code rate :  $k/n = MN / \{(M+1) \times (N+1)\}$
  - Block error or word error

$$P_M = \sum_{j=t+1}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

where,  $t$  : # of error symbols that can be corrected

## 코딩 이득 (Coding Gain)

- Definition
  - The reduction, expressed in decibels, in the required  $E_b/N_0$  to achieve a specified error performance of an error-correcting coded system over an un-coded one.
- Example



$$G(\text{dB}) = \left( \frac{E_b}{N_0} \right)_u (\text{dB}) - \left( \frac{E_b}{N_0} \right)_c (\text{dB})$$

For  $P_B = 10^{-6} \rightarrow 5 \text{ dB}$

## 블록 부호 (Block code)

### □ 벡터 공간

- 벡터 공간 (vector space)

- $V_n$ : 모든 2진  $n$ -비트의 집합
- $2^n$ 개 벡터 존재
- Two operations for the field  
: addition & multiplication

**Addition (Mod-2)**

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \\ 1 \oplus 0 &= 1 \\ 1 \oplus 1 &= 0 \end{aligned}$$

**Multiplication**

$$\begin{aligned} 0 \bullet 0 &= 0 \\ 0 \bullet 1 &= 0 \\ 1 \bullet 0 &= 0 \\ 1 \bullet 1 &= 1 \end{aligned}$$

- 벡터 부분 공간 (vector subspace)

- 벡터 공간  $V_n$ 의 부분공간  $S$

Linear Block Code (LBC)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in S \\ \text{If } s_i, s_j \in S; s_i + s_j \in S \dots \text{Linear !!} \end{array} \right.$$



## 블록 부호

예)

- $V_n = V_4 =$

$$\begin{pmatrix} 0000 & 0001 & 0010 & 0011 & 0100 & 0101 & 0110 & 0111 \\ 1000 & 1001 & 1010 & 1011 & 1100 & 1101 & 1110 & 1111 \end{pmatrix}$$

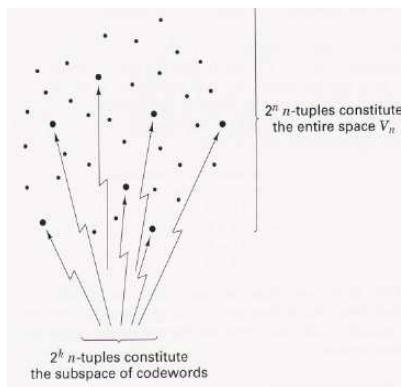
- $\rightarrow 2^4 = 16$  개의 4비트 심볼로 구성

$V_4$ 의 부분집합  $S$ 의 예

$$(0000 \quad 0101 \quad 1010 \quad 1111)$$

□ Example : A (6,3) linear block code

Message vector	Code vector
000	000000
100	110100
010	011010
110	101110
001	101001
101	011101
011	110011
111	000111



□ 생성 행렬 (Generator Matrix) :  $G_{k \times n}$

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

↑ 선형 독립인 기저(basis) 벡터

$$\mathbf{U} = \mathbf{mG} \quad (\mathbf{U}: \text{부호어})$$

$$\mathbf{m} = m_1, m_2, \dots, m_k \quad (\mathbf{m}: k \text{ 비트 메시지 심벌})$$

- 예) (6,3) 블록 부호에서의 생성행렬

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{V}_1 = [110100] \\ \mathbf{V}_2 = [011010] \\ \mathbf{V}_3 = [101001] \end{array} \right\} \text{기저(basis) 벡터}$$

- 생성 행렬을 이용한 부호어 생성
  - 예) (6,3) 블록 부호에서  $\mathbf{m} = [110]$ 의 부호어 생성 ( $n=6, k=3$ )

$$\mathbf{U} = \mathbf{mG} = [1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{V}_1 + 1 \cdot \mathbf{V}_2 + 0 \cdot \mathbf{V}_3$$

$$= 110100 + 011010 + 000000$$

$$= 101110$$



## 블록 부호

## □ Systematic linear block codes

- Linear block codes whose part of the sequence generated coincides with the  $k$  message digits

$$G = [P \mid I_k] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,(n-k)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2,(n-k)} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \ddots & \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{k,(n-k)} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Parity array portion
Identity matrix

- Systematic code vector

$$U = \underbrace{p_1, p_2, \dots, p_{n-k}}_{\text{parity bits}}, \underbrace{m_1, m_2, \dots, m_k}_{\text{message bits}}$$

## 블록 부호

- Example of Generator Matrix.

$$\begin{aligned}
 U &= [m_1 \quad m_2 \quad m_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{m_1 + m_3}_{u_1}, \underbrace{m_1 + m_2}_{u_2}, \underbrace{m_2 + m_3}_{u_3}, m_1, m_2, m_3
 \end{aligned}$$

## 블록 부호

- $m=3$ 비트 메시지 일 때 (6,3) 블록 부호
  - $2^n = 2^6 = 64$  개의 벡터 공간 존재
  - $2^k = 2^3 = 8$  개의 메시지 벡터  $\rightarrow$  8개의 부호어 형성

메시지 벡터 $\mathbf{m}$	부호어 $\mathbf{U}$
0 0 0	0 0 0 0 0 0
1 0 0	1 1 0 1 0 0
0 1 0	0 1 1 0 1 0
1 1 0	1 0 1 1 1 0
0 0 1	1 0 1 0 0 1
1 0 1	0 1 1 1 0 1
0 1 1	1 1 0 0 1 1
1 1 1	0 0 0 1 1 1

## 블록 부호

### □ 패리티 검사 행렬 (Parity Check Matrix)

- 생성행렬을 다시 쓰면

Systematic Linear Block Code!

$$\mathbf{G}_{k \times n} = [\mathbf{P} \mid \mathbf{I}_k]$$

{

$\mathbf{P}$  : 패리티 행렬 (parity matrix)  
 $\mathbf{I}_k$  : 단위 행렬 (identity matrix)

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,(n-k)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2,(n-k)} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{k,(n-k)} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- 패리티 검사행렬 :  $\mathbf{H}_{(n-k) \times n}$

$$\mathbf{H}_{(n-k) \times n} = \left[ \mathbf{I}_{n-k} \quad \mathbf{P}^T \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{(n-k),1} & p_{(n-k),2} & \cdots & p_{(n-k),k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^T = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{I}_{n-k} \\ \mathbf{P} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,(n-k)} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2,(n-k)} \\ \vdots & & & \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{k,(n-k)} \end{bmatrix}$$

→  $\mathbf{H}^T$ : 신드롬 계산 시 사용

## 블록 부호

예) (6,3)블록 부호에서 패리티 검사 행렬

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P} \mid \mathbf{I}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_{(n-k) \times n} = [\mathbf{I}_{n-k} \mid \mathbf{P}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-k} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 블록 부호

□ 오류 수신 신호 :  $\mathbf{r} = \mathbf{U} + \mathbf{e}$  ( $\mathbf{e}$ : 오류패턴)

- (6,3)블록 부호

메시지 벡터	부호열	
0 0 0	0 0 0 0 0 0	} 8개의 정상 부호열 $\mathbf{r} = \mathbf{U}$
1 0 0	1 1 0 1 0 0	
0 1 0	0 1 1 0 1 0	
1 1 0	1 0 1 1 1 0	
0 0 1	1 0 1 0 0 1	
1 0 1	0 1 1 1 0 1	
0 1 1	1 1 0 0 1 1	
1 1 1	0 0 0 1 1 1	
	.....	} 56개의 오류가 있는 수신된 부호열 $\mathbf{r} = \mathbf{U} + \mathbf{e}$
	0 0 1 1 1 0	
	.....	
	1 1 1 1 1 1	

## 블록 부호

□ 신드롬  $S = rH^T$ 

예) (6,3)블록 부호에서

- 송신 부호열 :  $U = 101110$
- 수신 부호열 :  $r = 001110$

$$S = rH^T = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0]$$

## 블록 부호

## □ Standard array for (6,3) code

	Coset Leader			Perfect code!			
000000	110100	011010	101110	101001	011101	110011	000111
000001	110101	011011	101111	101000	011100	110010	000110
000010	110110	011000	101100	101011	011111	110001	000101
000100	110000	011110	101010	101101	011001	110111	000011
001000	111100	010010	100110	100001	010101	111011	001111
010000	100100	001010	111110	111001	001101	100011	010111
100000	010100	111010	001110	001001	111101	010011	100111
010001	100101	001011	111111	111000	001100	100010	010110

Figure 6.11 Example of a standard array for a (6, 3) code.

- perfect code : standard array of  $t$ -error-correcting code has all the error patterns of  $t$  and fewer errors and no others as coset leader

# 블록 부호

- (6,3)부호 신드롬에 따른 오류 패턴

신드롬	오류 패턴
0 0 0	0 0 0 0 0 0
1 0 1	0 0 0 0 0 1
0 1 1	0 0 0 0 1 0
1 1 0	0 0 0 1 0 0
0 0 1	0 0 1 0 0 0
0 1 0	0 1 0 0 0 0
1 0 0	1 0 0 0 0 0
1 1 1	0 1 0 0 0 1

# 블록 부호

- Syndrome & standard array for (8, 2) code

Figure 6.15

Syndromes	Standard array
00000	1. 0000000 11110001 00111110 11001111
11100	2. 0000001 11110000 00111111 11001110
00111	3. 0000010 11110011 00111100 11001101
00001	4. 0000010 11110101 00111010 11001011
00010	5. 0000100 11111001 00110110 11000111
00100	6. 0001000 11100001 00011110 11011111
00100	7. 0010000 11010001 00011110 11101111
01000	8. 0100000 10110001 01111110 10001111
10000	9. 1000000 01110001 10111110 01001111
11001	10. 0000011 11110010 00111101 11001100
11101	11. 0000010 11110100 00111011 11001010
11110	12. 0000101 11110000 00110111 11000110
11000	13. 0001001 11100000 00101111 11011110
11010	14. 0010001 11010000 00011111 11101110
10100	15. 0100001 10110000 01111111 10001110
01100	16. 1000001 01110000 10111111 01001110
00110	17. 0000110 11110111 00111000 11001001
00101	18. 0001010 11110111 00110100 11001001
00101	19. 0001001 11100011 00011100 11011101
00011	20. 0010010 11010011 00011100 11101101
01111	21. 0100010 10110011 01111100 10001101
10111	22. 1000010 01110011 10111100 01001101
00001	23. 0000110 11111101 00110010 11000011
00010	24. 0001010 11100101 00101010 11011011
00100	25. 0010010 11010101 00011010 11101011
01000	26. 0100010 10110101 01111010 10001011
10000	27. 1000010 01110101 10111010 01001011
00010	28. 0001100 11101111 00100110 11010111
00100	29. 0010100 11011001 00010110 11100111
01000	30. 0100100 10111001 01110110 10000111
10000	31. 1000100 01111001 10110110 01000111
00100	32. 0011000 11000001 00001110 11111111
01000	33. 0101000 10100001 01101110 10011111
10000	34. 1001000 01100001 10101110 01011111
01100	35. 0110000 10010001 01011110 10101111
10100	36. 1010000 01010001 10011110 01101111
11000	37. 1100000 00110001 11111110 00011111
11010	38. 0000111 11110110 00111001 11001000
11011	39. 0001011 11100110 00101101 11011100
11101	40. 0010011 11010110 00011101 11101100
10001	41. 0100011 10110010 01111101 10001100
01001	42. 1000011 01110010 10111101 01001100
11111	43. 00001101 11111100 00110011 11000010
11100	44. 00010101 11100100 00101011 11011010
11010	45. 00100101 11010100 00010111 11101010
10101	46. 01000101 10110100 01110111 10001010
01101	47. 10000101 01110100 10111011 01001010
01110	48. 01000110 10110111 01110000 10001001
10110	49. 10000110 01110111 10110000 01001001
10010	50. 10010100 01100101 10101010 01011011
01001	51. 01100100 10010101 01010100 10101011
11001	52. 11000100 00110101 11110100 00001011
01010	53. 01101000 10011001 10101010 01101111
01010	54. 01011000 10101001 01100110 10010111
10010	55. 10011000 01101001 10100110 01010111
10100	56. 10101000 01011001 10010110 01100111
10100	57. 10100100 01010101 10011010 01101011
10011	58. 10100010 01010011 10011000 01101101
01011	59. 01100010 10010011 01011000 10101101
01010	60. 01010100 10100101 01101010 10011011
01011	61. 01010010 10100011 01101000 10011101
11010	62. 00110001 11011000 00010111 11100110
11010	63. 00010001 11101000 00100111 11101010
10101	64. 10010010 01100011 10101000 01011101



## 블록 부호

- 신드롬을 이용한 오류 수정

-신드롬  $S: 100 \rightarrow$  오류 패턴  $e: 100000$

$$\begin{array}{r} \mathbf{r} \\ + \\ \mathbf{e} \\ \hline \mathbf{U} \end{array} = \begin{array}{r} 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

→ 송신 부호어 복원

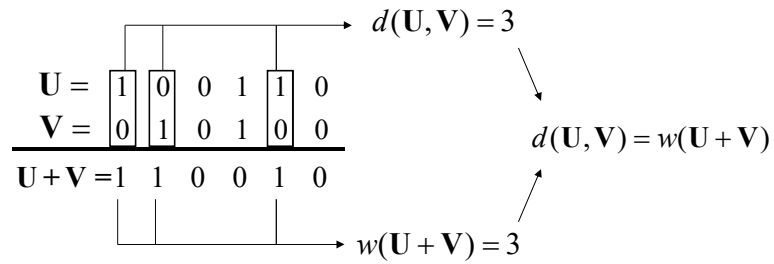
## 블록 부호

## □ Coding strength

- Hamming weight (해밍 가중치) for a vector  $U$ ,  $w(U)$ 
  - # of **nonzero elements** in  $U$
  - Hamming distance from the all-zero vector
  - Ex :  $U=100101101 \rightarrow w(U)=5$
- Hamming distance (해밍 거리),  $d(U,V)$ 
  - # of elements in which they **differ**
  - Equal to Hamming weight of their sum
  - Ex.  $U=100101101$ ,  $V=011110100 \rightarrow d(U,V)=6$ ;  $U+V=111011001 \rightarrow w(U+V)=6$
- Minimum distance of a linear code,  $d_{\min}$ 
  - The **smallest Hamming distance** between all pairs of code
  - Only need to examine the weight of each code vector (excluding the all-zero vector)

## 블록 부호

- 해밍 가중치와 해밍 거리와의 관계



## 블록 부호

### □ Error detection & correction

- Task of decoder : To estimate the transmitted code vector  $U_i$
- To use maximum likelihood algorithm

$$P(r|U_i) = \max_{\text{over all } U_j} P(r|U_j)$$

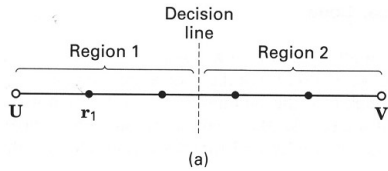
- Likelihood is **inversely proportional** to the distance
- To use Hamming distance

$$d(r, U_i) = \min_{\text{over all } U_j} d(r, U_j)$$

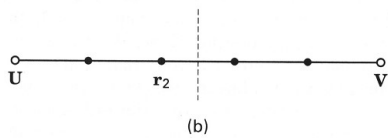


## 블록 부호

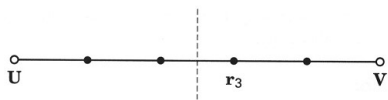
▪ Example



U로 부터 Distance 1, V로 부터 Distance 4.  
U를 선택 → 4bits 오류라면 Decoding error



U로 부터 Distance 2, V로 부터 Distance 3.  
U를 선택 → 3bits 오류라면 Decoding error



U로 부터 Distance 3, V로 부터 Distance 2.  
V를 선택 → 3bits 오류라면 Decoding error

## 블록 부호

▪ Error correcting capability

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

Ex. 00000000 vs. 11111111 → 11100000?

▪ Error detection capability

$$e = d_{\min} - 1$$

Ex. 00000000 vs. 11111111 → 11111110?

▪ Simultaneous error correction ( $\alpha$ ) and detection ( $\beta$ )

$$d_{\min} \geq \alpha + \beta + 1 \Rightarrow \text{Example}$$

▪ Message-error probability

$$P_M \leq \sum_{j=t+1}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

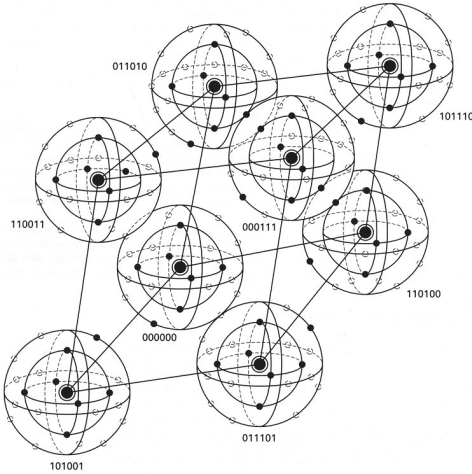
▪ Decoded bit-error probability

$$P_B \approx \frac{1}{n} \sum_{j=t+1}^n j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

When $d_{\min} = 7$ & $\beta \geq \alpha$	
Detect ( $\beta$ )	Correct ( $\alpha$ )
3	3
4	2
5	1
6	0

## 블록 부호

## □ Visualization of 8 codewords, (6,3) code



## Remark

- Large block circle : 8 codewords
- Each inner layer : Ham. Dis. of 1
- Each outer layer : Ham. Dis. of 2
- All correctable codewords : 56개
  - ✓ 1-bit error : 48개
  - ✓ 2-bit error : 8개
    - 2-bit error : 총 15가지
    - One pattern (010001)

## 블록 부호

## □ 해밍 부호

$$(n, k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m), \quad m : 2 \text{ 이상의 정수}$$

- 해밍 부호 특징
  - 최소 거리 ( $d_{\min}$ ) : 3
  - 오류 정정 능력: 단일 오류 정정
  - 오류 검출 능력: 두 개 이하 오류 검출

- 비트 오류 확률: 
$$P_B \approx \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

( $p$ : 채널 심볼 오류 확률)

## 블록 부호

- Example : (7,4) Hamming code

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Determine the codeword for message code 0011.
- If R=1000010, determine if an error has been made.

## 블록 부호

- Generator matrix

$$G = [P \mid I_k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Generation of code vector

$$\begin{aligned} U = mG &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 블록 부호

- Syndrome testing

$$S = rH^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \ 0 \ 1]$$

- 좌측에서 세 번째 비트에 오류
- Corrected codeword is "1010010"

## 순회 부호

### □ 순회 부호 (cyclic code)

- 정의
  - $(n, k)$  부호가 다음의 특성을 가지면 순회 부호

$$\text{if } \mathbf{U} \in \mathbf{S}, \mathbf{U}^{(i)} \in \mathbf{S}$$

$$\text{여기서 } \begin{cases} \mathbf{U} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) & (\mathbf{U} : \text{부호어}) \\ \mathbf{U}^{(i)} = (u_{n-i}, u_{n-i+1}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-i-1}) \end{cases}$$

( $\mathbf{U}^{(i)}$ ):  $i$  번 비트 우측으로 이동)

## 순회 부호

- 순회 부호의 대수적 구조
  - 부호어 다항식

$$\mathbf{U}^{(i)}(X) = X^i \mathbf{U}(X) \text{ modulo } (X^n + 1)$$

예) 부호 벡터의 순회 이동

$n = 4$ ,  $\mathbf{U} = 1101$  일 때, 세 번 순회 이동한 부호어

$$\mathbf{U}(X) = 1 + X + X^3$$

$$X^i \mathbf{U}(X) = X^3 \mathbf{U}(X) = X^3 + X^4 + X^6$$

$$X^n + 1 = X^4 + 1$$

$$\rightarrow \mathbf{U}^{(3)}(X) : X^3 + X^2 + 1$$

## 순회 부호

### □ 조직적(systematic) 부호화

- 부호어 다항식에 해당하는 부호 벡터

$$\mathbf{U}(X) = \mathbf{p}(X) + X^{n-k} \mathbf{m}(X) = \mathbf{q}(X) \mathbf{g}(X)$$

$$\mathbf{U} = \underbrace{(p_0, p_0, \dots, p_{n-k-1})}_{(n-k) \text{ 패리티 비트}}, \underbrace{(m_0, m_1, \dots, m_{k-1})}_{k \text{ 메시지 비트}}$$

- $\mathbf{U}(X)$  : 부호어 다항식
- $\mathbf{p}(X)$  : 나머지 다항식 ( $X^{n-k} \mathbf{m}(X) \bmod g(X)$ )
- $\mathbf{g}(X)$  : 생성 다항식
- $\mathbf{q}(X)$  : 몫 다항식

## 순회 부호

예)

$$\mathbf{g}(X) = 1 + X + X^3 \text{ 이용}$$

(7,4) 부호어 집합 중

 $\mathbf{m} = 1011$  에 해당하는 조직적 부호어 생성방법

$$\rightarrow n = 7, k = 4, n - k = 3$$

$$\mathbf{m}(X) = 1 + X^2 + X^3$$

$$X^{n-k} \mathbf{m}(X) = X^3 (1 + X^2 + X^3) = X^3 + X^5 + X^6$$

## 순회 부호

 $X^{n-k} \mathbf{m}(X)$  를  $\mathbf{g}(X)$  로 나누면

$$X^3 + X^5 + X^6 = \underbrace{(1 + X + X^2 + X^3)}_{\mathbf{q}(X)} \underbrace{(1 + X + X^3)}_{\mathbf{g}(X)} + \underbrace{1}_{\mathbf{p}(X)}$$

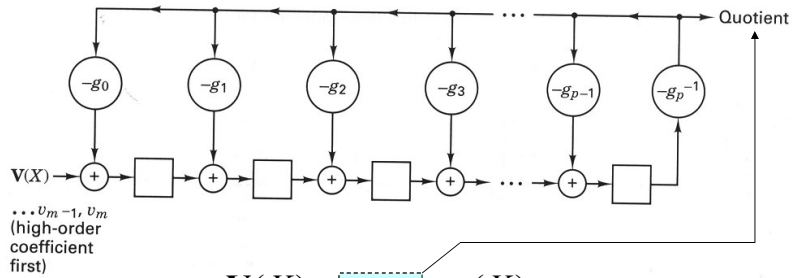
$$\mathbf{U}(X) = \mathbf{p}(X) + X^3 \mathbf{m}(X) = 1 + X^3 + X^5 + X^6$$

$$\mathbf{U} = \left[ \underbrace{1 \ 0 \ 0}_{\text{패리티 비트}} \ \underbrace{1 \ 0 \ 1 \ 1}_{\text{메시지 비트}} \right]$$

$$\rightarrow \mathbf{m} = 1011 \rightarrow \mathbf{U} = 1001011$$

## 순회 부호

### □ Circuit for dividing polynomials



$$\frac{V(X)}{g(X)} = \mathbf{q(X)} + \frac{p(X)}{g(X)}$$

## 순회 부호

### □ Example 6.9: Dividing circuit

$$V(X) = x^3 + x^5 + x^6 \Rightarrow (V = 0001011) \quad \longrightarrow \quad \frac{V(X)}{g(X)}?$$

$$g(X) = (1 + x + x^3)$$

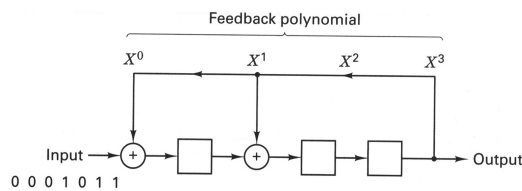


Figure 6.17 Dividing circuit for Example 6.9.

$$\frac{x^3 + x^5 + x^6}{1 + x + x^3} = \mathbf{q(X)} + \frac{p(X)}{g(X)}$$

## 순회 부호

## □ Example 6.9: Dividing circuit

Input queue	Shift number	Register contents	Output & Feedback
0001011	0	000	-
000101	1	100	0
00010	2	110	0
0001	3	011	0
000	4	011	1 → $x^3$
00	5	111	1 → $x^2$
0	6	101	1 → $x^1$
-	7	100	1 → $x^0$

Remainder!

Quotient!

$$\frac{x^3 + x^5 + x^6}{1 + x + x^3} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{1}{1 + x + x^3}$$

## 순회 부호

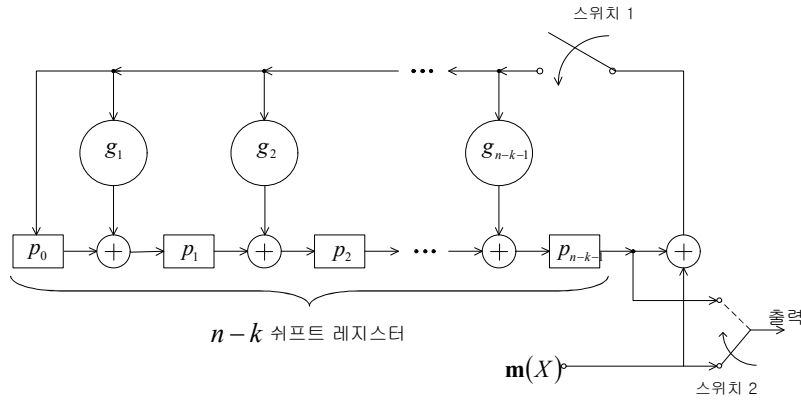
□  $(n-k)$  단 쉬프트 레지스터를 이용한 순회 부호기

1. 메시지 비트가  $(n-k)$  단 쉬프트 레지스터로 들어갈 수 있도록 스위치 1은 처음  $k$  번 이동하는 동안 닫혀 있음
2. 처음  $k$  번 이동하는 동안 메시지 비트가 바로 출력으로 갈 수 있도록 스위치 2는 아래 위치로 연결 됨
3.  $k$  번째 메시지 비트가 전송된 후, 스위치 1은 열리고, 스위치 2는 위로 위치를 바꿈
4. 나머지  $(n-k)$  번 이동 동안 패리티 비트가 출력으로 나가고, 레지스터는 비어있게 됨
5. 총 이동의 수는  $n$  이고, 출력은 부호어 다항식  $p(X) + X^{n-k}m(X)$



## 순회 부호

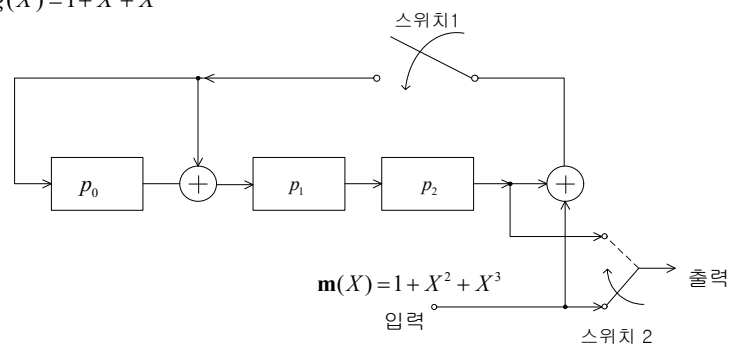
- 순회 부호기



## 순회 부호

- Example 6.10 : (7,4) 순회 부호화기

$$\begin{cases} \mathbf{m} = 1011 \\ g(X) = 1 + X + X^3 \end{cases}$$



< (7,4) 부호기 >

## 순회 부호

- How does it work?

입력 큐(queue)	이동 횟수	레지스터 내용	출력
1 0 1 1	0	0 0 0	-
1 0 1	1	1 1 0	1
1 0	2	1 0 1	1
1	3	1 0 0	0
-	4	1 0 0	1

출력 부호어:  $\mathbf{U} = 1001011$

$$\mathbf{U}(X) = 1 + X^3 + X^5 + X^6$$

## 순회 부호

- $(n-k)$  단 쉬프트 레지스터를 이용한 오류 검출

$$\mathbf{U}(X) = \mathbf{m}(X)\mathbf{g}(X)$$

$$\mathbf{r}(X) = \mathbf{U}(X) + \mathbf{e}(X) \quad \begin{cases} \mathbf{r}(X) : \text{수신 벡터} \\ \mathbf{e}(X) : \text{오류 다항식} \end{cases}$$

$$\mathbf{S}(X) = \mathbf{r}(X) \text{ modulo } \mathbf{g}(X)$$

$$\mathbf{r}(X) = \mathbf{q}(X)\mathbf{g}(X) + \mathbf{S}(X)$$

$$\begin{cases} \mathbf{S} = 0 : \text{오류 없는 부호어 검출} \\ \mathbf{S} \neq 0 : \text{오류 부호어 검출 및 정정 가능} \end{cases}$$

## 순회 부호

- 3단 쉬프트 레지스터를 이용한 (7,4) 블록 부호 신드롬 계산

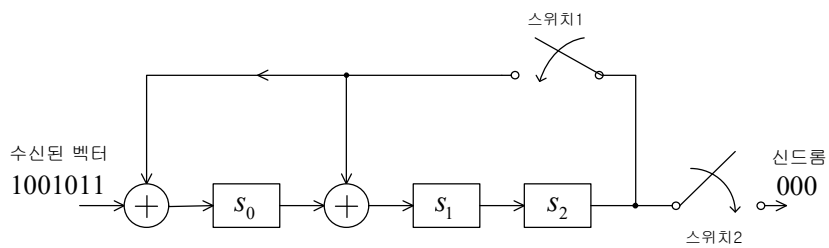
예)  $\mathbf{m} = 1011$   
 $\mathbf{g}(X) = 1 + X + X^3$   
 $\mathbf{U} = 1001011$

입력 큐(queue)	이동 횟수	레지스터 내용
1 0 0 1 0 1 1	0	0 0 0
1 0 0 1 0 1	1	1 0 0
1 0 0 1 0	2	1 1 0
1 0 0 1	3	0 1 1
1 0 0	4	0 1 1
1 0	5	1 1 1
1	6	1 0 1
-	7	0 0 0 (신드롬)

↓  
오류 없는 부호어

## 순회 부호

- 신드롬 계산을 위한 나누기 회로



## 기타 코드 (1)

### Extended Golay code

(23, 12) Gold code + 1 parity bit → (24, 12) Extended Golay code

$$d_{\min} = 7 \qquad d_{\min} = 8$$

$$P_B \approx \frac{1}{24} \sum_{j=4}^{24} j \binom{24}{j} p^j (1-p)^{24-j}$$

### BCH code

- BCH (Bose–Chadhuri–Hocquenghem) code
- Generalization of Hamming codes
- Powerful class of cyclic codes

## 기타 코드 (2)

### Example of BCH code

TABLE 6.4 Generators of Primitive BCH Codes

n	k	t	g(x)	n	k	t	g(x)
7	4	1	13	255	171	11	15416214212342356077061630637
15	11	1	23	163	12	12	7500415510075602551574724514601
	7	2	721	155	13	13	3757513005407665015722506464677633
	5	3	2467	147	14	14	1642130173537165525304165305441011711
31	26	1	45	139	15	15	461401732060175561570722730247453567445
	21	2	3551	131	18	18	2157133314715101512612502774421420241
	16	3	107657				65471
	11	5	5423325	123	19	19	12061450522420660037172103265161412262
	6	7	313365047				72506267
63	57	1	103	115	21	21	6052666557210024726363640460027635255
	51	2	12471				6313472737
	45	3	1701317	107	22	22	2220577232206625631241730023534742017
	39	4	166623567				6574750154441
	36	5	1033500423	99	23	23	1065666725347317422274141620157433225
	30	6	157464165547				2411076432303431
	24	7	17323260404441	91	25	25	6750265030327444172723631724732511075
	18	10	1363026512351725				550762720724344561
	16	11	6331141367235453	87	26	26	1101367634147432364352316343071720462
	10	13	472622305527250155				06722545273311721317
	7	15	5231045543503271737	79	27	27	6670003563765750002027034420736617462
							1015326711766541342355

$g(x)$ : octal number

$\therefore 13: 001011 \rightarrow g(x) = x^3 + x + 1$

## 기타 코드 (3)

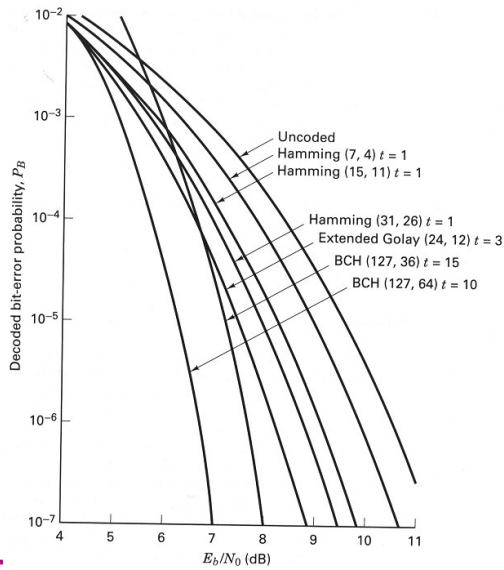
### Example of BCH code (cont'd)

127	120	1	211	71	29	2402471052064432151555417211233116320
113	2	41567				5444250362557643221706035
106	3	11554743		63	30	1075447505516354432351521735770700366
99	4	3447023271				6111726455267613656702543301
92	5	624730022327		55	31	7315425203501100133015275306032054325
85	6	130704476322273				414326755010557044426035473617
78	7	26230002166130115		47	42	2533542017062646563033041377406233175
71	9	6255010713253127753				123334145446045005066024552543173
64	10	1206534025570773100045		45	43	152020560532341611311013463764237056
57	11	335265252905705053517721				3670024470762373033202157025051541
50	13	54446512523314012421501421		37	45	5136330255067007414177447245437530420
43	14	17721772213651227521220574343				73570617432343234764454737403044003
36	15	3146074666522075044764574721735		29	47	3025715536673071465527064012361377115
29	21	403114461367670603667530141176155				3424232420117411406025475741040356
22	23	123376070404722522435445626637647043				5037
15	27	22057042445604554770523013762217604353		21	55	1256215257060332656001773153607612103
8	31	7047264052751030651476224271567733130217				22734140565307454252115312161446651
255	247	1	435			3473725
239	2	267543		13	59	4641732005052564544426573714250066004
231	3	156720665				33067744547656140317467721357026134
223	4	75626641375				460500547
215	5	23157564726421		9	63	1572602521747246320103104325535513461
207	6	16176560367636227				41623672120440745451127661155477055
199	7	7633031270420722341				61677516057
191	8	2663470176115333714567				
187	9	52755313540001322236351				
179	10	22624710717340432416300455				

Source: Reprinted with permission from "Table of Generators for BCH Codes," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT10, no. 4, Oct. 1964, p. 391. © 1964 IEEE.

## 성능 비교

Figure 6.22



## Homeworks

### □ 연습문제

- 6.8, 6.10, 6.15
- 6.18, 6.20

## R-S 부호

### □ R-S 부호

- $m$  비트 열의 심볼로 구성된 비2진(nonbinary) 순회 부호 ( $m \geq 2$ )

$$(n, k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - 2t)$$

여기서,  $k$ : 부호화될 데이터 심볼 수  
 $n$ : 부호화된 블록에 있는 부호 심볼의 총 수  
 $t$ : 심볼 오류 정정 능력  
 $n - k = 2t$ : 패리티 심볼 수

- 비2진 순환 부호에서 두 부호어 사이의 거리는 부호어 열에서 서로 다른 심볼의 수로 정의

## R-S 부호

### □ 특징

- 심볼 단위로 오류 정정

### □ 적용

- 저장 매체 (CD, DVD 등)
- 무선통신(휴대폰 등)
- 위성통신
- 디지털 TV
- 고속 모뎀(ADSL 등)

## R-S 부호

### □ R-S 부호의 최소거리

$$d_{\min} = n - k + 1$$

### □ 오류 정정 능력

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n - k}{2} \right\rfloor$$

- 여기서  $\lfloor x \rfloor$  는 x보다 크지 않은 가장 큰 정수
- t 개 심볼을 정정하기 위하여 2t 개의 패리티 심볼 필요
- t 개의 심볼은 오류의 위치를 찾는데 사용
- 다른 t 개는 오류의 올바른 값을 찾기 위해 사용

## R-S 부호

### □ 연립 오류 정정

▪예) (7,3) R-S 부호

- 각 심볼은 3비트로 구성 ( $m=3$  bits)

-  $n - k = 4$

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n - k}{2} \right\rfloor = 2$$

→ 7개의 심볼 안에서 2개의 심볼 오류까지 정정

## R-S 부호

### □ R-S 복호된 심볼 오류 확률

$$P_E \approx \frac{1}{2^m - 1} \sum_{j=t+1}^{2^m - 1} j \binom{2^m - 1}{j} p^j (1-p)^{2^m - 1 - j}$$

여기서, p: 채널 심볼 오류 확률  
t: 부호의 심볼 오류 정정 능력  
m: 심볼당 비트 수



## R-S 부호

## □ 부호화

- 생성 다항식

$$g(X) = g_0 + g_1X + g_2X^2 + \dots + g_{2t-1}X^{2t-1} + X^{2t}$$

- 다항식 최고 차수 = 패리티 심볼 수
- 생성 다항식 최고 차수가  $2t$  이므로  
다항식의 근은  $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{2t}$  으로 나타냄

## R-S 부호

## □ 조직적(Systematic) 부호화

$$X^{n-k}m(X) = q(X)g(X) + p(X)$$

여기서,  $p(X)$ : 패리티

$q(X)$ : 몫

$$p(X) = X^{n-k}m(X) \text{ modulo } g(X)$$

- 부호어 다항식  $U(X)$

$$U(X) = q(X)g(X) + p(X) + X^{n-k}m(X)$$

## R-S 부호

□ 갈루아체(Galois field; GF): GF(2<sup>m</sup>)

- 예) (7,3) R-S 부호에서는 GF(8)을 사용
- GF(8) = {0, α<sup>0</sup>, α<sup>1</sup>, α<sup>2</sup>, α<sup>3</sup>, α<sup>4</sup>, α<sup>5</sup>, α<sup>6</sup>}
- 원시 다항식 (Primitive Polynomial): f(X) = 1 + X + X<sup>3</sup>

0 = 0

α<sup>0</sup> = 1

α<sup>1</sup> = α

α<sup>2</sup> = α<sup>2</sup>

α<sup>3</sup> = 1 + α

If α is a root of polynomial f(x)  
 f(α) = 1 + α + α<sup>3</sup> → α<sup>3</sup> = 1 + α

α<sup>4</sup> = α · α<sup>3</sup> = α · (1 + α) = α + α<sup>2</sup>

α<sup>5</sup> = α · α<sup>4</sup> = α · (α + α<sup>2</sup>) = α<sup>2</sup> + α<sup>3</sup> = 1 + α + α<sup>2</sup>

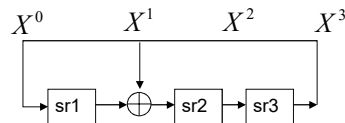
α<sup>6</sup> = α · α<sup>5</sup> = α · (1 + α + α<sup>2</sup>) = α + α<sup>2</sup> + α<sup>3</sup> = 1 + α<sup>2</sup>

α<sup>7</sup> = α · α<sup>6</sup> = α · (1 + α<sup>2</sup>) = α + α<sup>3</sup> = 1 = α<sup>0</sup>

## R-S 부호

□ 선형 궤환 쉬프트 레지스터(LFSR)를 이용한 회로 구현

(원시 다항식: f(X) = 1 + X + X<sup>3</sup>)



초기값을 "100"으로 한 뒤  
 운영하면 순서대로 값이  
 생성됨

GF(8)	(sr1 sr2 sr3)
0	(0 0 0)
α <sup>0</sup>	(1 0 0)
α <sup>1</sup>	(0 1 0)
α <sup>2</sup>	(0 0 1)
α <sup>3</sup>	(1 1 0)
α <sup>4</sup>	(0 1 1)
α <sup>5</sup>	(1 1 1)
α <sup>6</sup>	(1 0 1)

## R-S 부호

□ Two operation for GF(8) with  $f(x) = 1 + x + x^3$

TABLE 8.2 Addition Table for GF(8) with  $f(X) = 1 + X + X^3$

Addition	$\alpha^0$	$\alpha^0$	$\alpha^1$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^6$
	$\alpha^1$	0	$\alpha^3$	$\alpha^6$	$\alpha^1$	$\alpha^5$	$\alpha^4$	$\alpha^2$
	$\alpha^2$	$\alpha^6$	$\alpha^4$	0	$\alpha^5$	$\alpha^1$	$\alpha^3$	$\alpha^0$
	$\alpha^3$	$\alpha^1$	$\alpha^0$	$\alpha^5$	0	$\alpha^6$	$\alpha^2$	$\alpha^4$
	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^2$	$\alpha^1$	$\alpha^6$	0	$\alpha^0$	$\alpha^3$
	$\alpha^5$	$\alpha^4$	$\alpha^6$	$\alpha^3$	$\alpha^2$	$\alpha^0$	0	$\alpha^1$
	$\alpha^6$	$\alpha^2$	$\alpha^5$	$\alpha^0$	$\alpha^4$	$\alpha^3$	$\alpha^1$	0

TABLE 8.3 Multiplication Table for GF(8) with  $f(X) = 1 + X + X^3$

Multiplication	$\alpha^0$	$\alpha^0$	$\alpha^1$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^6$
	$\alpha^1$	$\alpha^1$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^6$	$\alpha^0$
	$\alpha^2$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^6$	$\alpha^0$	$\alpha^1$
	$\alpha^3$	$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^6$	$\alpha^0$	$\alpha^1$	$\alpha^2$
	$\alpha^4$	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^6$	$\alpha^0$	$\alpha^1$	$\alpha^2$	$\alpha^3$
	$\alpha^5$	$\alpha^5$	$\alpha^6$	$\alpha^0$	$\alpha^1$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$
	$\alpha^6$	$\alpha^6$	$\alpha^0$	$\alpha^1$	$\alpha^2$	$\alpha^3$	$\alpha^4$	$\alpha^5$

## R-S 부호

예) (7,3) R-S 부호화

( 입력 메시지  $(\alpha, \alpha^3, \alpha^5) = (010, 110, 111)$  일 때 )

- 생성 다항식:

-  $n - k = 4 \rightarrow g(X)$  는 4차 다항식  
 - 근은  $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$

$$\begin{aligned} \rightarrow g(X) &= (X - \alpha)(X - \alpha^2)(X - \alpha^3)(X - \alpha^4) \\ &= \alpha^3 + \alpha^1 X + \alpha^0 X^2 + \alpha^3 X^3 + X^4 \end{aligned}$$

- 메시지 다항식:

$$m(X) = \alpha^1 + \alpha^3 X + \alpha^5 X^2$$

## R-S 부호

- 상항 이동:

$$X^4 \mathbf{m}(X) = \alpha^1 X^4 + \alpha^3 X^5 + \alpha^5 X^6$$

- 패리티 다항식:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(X) &= X^4 \mathbf{m}(X) \text{ modulo } \mathbf{g}(X) \\ &= \alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + \alpha^6 X^3 \end{aligned}$$

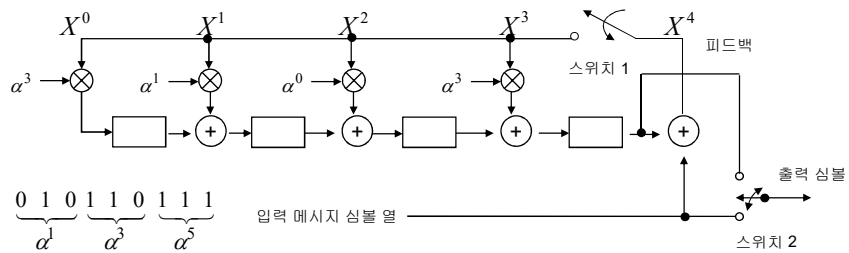
- 부호어 다항식:

$$\mathbf{U}(X) = \alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + \alpha^6 X^3 + \alpha^1 X^4 + \alpha^3 X^5 + \alpha^5 X^6$$

## R-S 부호

### □ (7, 3) R-S 부호기

- 4 (= n - k) 단 쉬프트 레지스터를 이용한 조직적 부호화



□ : 쉬프트 레지스터



## R-S 부호

## □ R-S 부호의 복호화

- 수신된 부호어

$$\mathbf{r}(X) = \mathbf{U}(X) + \mathbf{e}(X)$$

여기서,  $\mathbf{U}(X)$ : 부호어 다항식  
 $\mathbf{e}(X)$ : 오류 패턴 다항식

- 오류 패턴 다항식

$$\mathbf{e}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i X^i$$

여기서,  $e_i$ : 오류 값  
 $X^i$ : 오류 위치

## R-S 부호

- 신드롬 계산

$$\begin{aligned} S_i &= \mathbf{r}(X)|_{X=\alpha^i} = \mathbf{r}(\alpha^i) \\ &= \mathbf{U}(\alpha^i) + \mathbf{e}(\alpha^i) = \mathbf{e}(\alpha^i) \quad i=1, \dots, n-k \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{0} & \rightarrow \text{오류 없음} \\ \mathbf{S} \neq \mathbf{0} & \rightarrow \text{오류 존재} \end{cases}$$

- $(n, k)$  R-S 부호에는  $n-k$  개의 신드롬 존재

## R-S 부호

예) (7,3) R-S 부호  
( 입력 메시지  $(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5)$  일 때 )

- 2 심볼 오류 가정

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{e}(X) &= 0 + 0X + 0X^2 + \alpha^2 X^3 + \alpha^5 X^4 + 0X^5 + 0X^6 \\ &= (000) + (000)X + (000)X^2 + (001)X^3 + (111)X^4 + (000)X^5 + (000)X^6 \end{aligned}$$

↑                    ↑  
오류 발생 비트

- 수신된 부호어 다항식

$$\mathbf{r}(X) = \mathbf{U}(X) + \mathbf{e}(X)$$

Eq. (8.26)

$$\mathbf{r}(X) = \alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + \alpha^0 X^3 + \alpha^6 X^4 + \alpha^3 X^5 + \alpha^5 X^6$$

## R-S 부호

- 신드롬 계산

$$\begin{aligned} S_1 = \mathbf{r}(\alpha) &= \alpha^0 + \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^3 + \alpha^{10} + \alpha^8 + \alpha^{11} \\ &= \alpha^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 = \mathbf{r}(\alpha^2) &= \alpha^0 + \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^{14} + \alpha^{13} + \alpha^{17} \\ &= \alpha^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 = \mathbf{r}(\alpha^3) &= \alpha^0 + \alpha^5 + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^{18} + \alpha^{18} + \alpha^{23} \\ &= \alpha^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 = \mathbf{r}(\alpha^4) &= \alpha^0 + \alpha^6 + \alpha^{12} + \alpha^{12} + \alpha^{22} + \alpha^{23} + \alpha^{29} \\ &= 0 \end{aligned}$$

→  $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \neq \mathbf{0}$  이므로 오류 존재

## R-S 부호

- 오류 위치

- 부호어안에  $X^{j_1}, X^{j_2}, \dots, X^{j_v}$  위치에  $v$  개 오류가 발생했다고 가정

$$\mathbf{e}(X) = e_{j_1} X^{j_1} + e_{j_2} X^{j_2} + \dots + e_{j_v} X^{j_v}$$

여기서,  $1, 2, \dots, v$ : 첫 번째, 두 번째, ...,  $v$  번째 오류,  
 $j$ : 오류 위치 ( $j=1, 2, \dots, 2t$ )

## R-S 부호

- $\mathbf{r}(\alpha^i) \rightarrow n - k = 2t$  개의 신드롬을 얻음

$$S_1 = \mathbf{r}(\alpha^1) = e_{j_1} \beta_1 + e_{j_2} \beta_2 + \dots + e_{j_v} \beta_v$$

$$S_2 = \mathbf{r}(\alpha^2) = e_{j_1} \beta_1^2 + e_{j_2} \beta_2^2 + \dots + e_{j_v} \beta_v^2$$

$$\vdots$$

$$S_{2t} = \mathbf{r}(\alpha^{2t}) = e_{j_1} \beta_1^{2t} + e_{j_2} \beta_2^{2t} + \dots + e_{j_v} \beta_v^{2t}$$

여기서,  $\beta_\ell = \alpha^{j_\ell}$ 는 오류 위치 번호

$\rightarrow 2t$  개 방정식 ( $t$  개의 오류 값,  $t$  개의 오류 위치)

- R-S 복호 알고리즘: 비선형 신드롬들을 푸는 것



## R-S 부호

- 오류 위치 다항식

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= (1 + \beta_1 X)(1 + \beta_2 X) \cdots (1 + \beta_v X) \\ &= 1 + \sigma_1 X + \sigma_2 X^2 + \cdots + \sigma_v X^v\end{aligned}$$

여기서,  $\sigma(X)$ 의 근:  $1/\beta_1, 1/\beta_2, \dots, 1/\beta_v$  (역수가 오류 위치 번호)

오류 위치 번호  $\beta_i$ 는  $i$  번째 오류 위치

## R-S 부호

- 자기 회귀(autoregressive) 모델
  - 처음  $t$ 개 신드롬으로부터 다음 신드롬 예측

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{t-1} & S_t \\ S_2 & S_3 & S_3 & \cdots & S_t & S_{t+1} \\ & & & \cdots & & \\ S_{t-1} & S_t & S_{t+1} & \vdots & S_{2t-3} & S_{2t-2} \\ S_t & S_{t+1} & S_{t+2} & \cdots & S_{2t-2} & S_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_{t-1} \\ \vdots \\ \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{t+1} \\ -S_{t+2} \\ \vdots \\ -S_{2t-1} \\ -S_{2t} \end{bmatrix}$$

여기서  $\sigma_i$ 는 오류 위치 다항식의 계수

→  $\sigma_i$ 를 구해서 오류 위치 다항식으로부터 오류 위치를 알아냄

## R-S 부호

- 예) (7,3) R-S 부호  
 ( 입력 메시지  $(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5)$  일 때 )  
 -  $t=2$  이므로

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$$

- 앞에서 계산한 값을 이용

$$\begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## R-S 부호

$$\begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix} = \left( \text{Inv} \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^6 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha^6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \alpha^6 \end{bmatrix}$$

$$\left( \text{Inv}[A] = \frac{\text{cofactor}[A]}{\det[A]} \right)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma(X) &= 1 + \sigma_1 X + \sigma_2 X^2 \\ &= 1 + \alpha^6 X + \alpha^0 X^2 \end{aligned}$$

## R-S 부호

-  $X = \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$  를 각각 대입하여 오류 위치를 찾음

$$\sigma(\alpha^0) = \alpha^0 + \alpha^6 + \alpha^0 = \alpha^6 \neq 0$$

$$\sigma(\alpha^1) = \alpha^2 + \alpha^7 + \alpha^0 = \alpha^2 \neq 0$$

$$\sigma(\alpha^2) = \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^0 = \alpha^6 \neq 0$$

$$\sigma(\alpha^3) = \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^0 = 0 \rightarrow \text{오류 발생}$$

$$\sigma(\alpha^4) = \alpha^8 + \alpha^{10} + \alpha^0 = 0 \rightarrow \text{오류 발생}$$

$$\sigma(\alpha^5) = \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^0 = \alpha^2 \neq 0$$

$$\sigma(\alpha^6) = \alpha^{12} + \alpha^{12} + \alpha^0 = \alpha^0 \neq 0$$

오류 위치는 근의 역수!

$$\rightarrow \beta_1 = 1/\alpha^4 = \alpha^3, \beta_2 = 1/\alpha^3 = \alpha^4 \text{ 이므로 } \beta_1 = \alpha^3 = X^3, \beta_2 = \alpha^4 = X^4$$

$$\Rightarrow e(X) = e_{j_1} X^{j_1} + e_{j_2} X^{j_2} = e_3 X^3 + e_4 X^4$$

## R-S 부호

■ 오류 값

- 특정 오류 위치에서 오류 값은 신드롬을 이용하여 구함

- 각 오류 값은 특정 위치와 연관:  $e_{j_\ell} \rightarrow e_\ell$

$$S_1 = \mathbf{r}(\alpha^1) = e_1 \beta_1 + e_2 \beta_2 + \dots + e_v \beta_v$$

$$S_2 = \mathbf{r}(\alpha^2) = e_1 \beta_1^2 + e_2 \beta_2^2 + \dots + e_v \beta_v^2$$

⋮

$$S_{2t} = \mathbf{r}(\alpha^{2t}) = e_1 \beta_1^{2t} + e_2 \beta_2^{2t} + \dots + e_v \beta_v^{2t}$$

→ 2t개중 임의의 t개 다항식을 이용하여 오류 값을 구함

## R-S 부호

예) (7,3) R-S 부호

- (입력 메시지  $(\alpha, \alpha^3, \alpha^5)$  일 때)
- 오류 위치  $\beta_1 = \alpha^3, \beta_2 = \alpha^4$ 에서 오류 값  $e_1, e_2$  은 신드롬에 의해 결정
- 4개의 신드롬 중 임의의 2개를 선택

$$S_1 = \mathbf{r}(\alpha) = e_1\beta_1 + e_2\beta_2$$

$$S_2 = \mathbf{r}(\alpha^2) = e_1\beta_1^2 + e_2\beta_2^2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^5 \end{bmatrix}$$

## R-S 부호

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \left( \text{Inv} \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^4 \\ \alpha^6 & \alpha^8 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha^5 \\ \alpha^0 & \alpha^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha^5 \end{bmatrix}$$

→ 구해진 오류 값과 오류 위치로 오류 패턴 다항식을 쓰면

$$\Rightarrow \mathbf{e}(X) = e_{j_1} X^{j_1} + e_{j_2} X^{j_2} = \alpha^2 X^3 + \alpha^5 X^4$$

## R-S 부호

- 추정된 오류 다항식

$$\hat{\mathbf{e}}(X) = e_{j_1} X^{j_1} + e_{j_2} X^{j_2} + \dots + e_{j_v} X^{j_v}$$

- 오류 정정

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}(X) &= \mathbf{r}(X) + \hat{\mathbf{e}}(X) \\ &= \mathbf{U}(X) + \mathbf{e}(X) + \hat{\mathbf{e}}(X) \\ &= \mathbf{U}(X)\end{aligned}$$

## R-S 부호

예) (7,3) R-S 부호

( 입력 메시지  $(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5)$ 일 때 )

- 추정된 수신 다항식

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}(X) &= e_{j_1} X^{j_1} + e_{j_2} X^{j_2} \\ &= \alpha^2 X^3 + \alpha^5 X^4\end{aligned}$$

- 오류 정정

$$\hat{\mathbf{U}}(X) = \mathbf{r}(X) + \hat{\mathbf{e}}(X)$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{r}(X) = \alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + \alpha^0 X^3 + \alpha^6 X^4 + \alpha^3 X^5 + \alpha^5 X^6 \\ + \mathbf{e}(X) = \phantom{\alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + } \alpha^2 X^3 + \alpha^5 X^4 \\ \hline \hat{\mathbf{U}}(X) = \alpha^0 + \alpha^2 X + \alpha^4 X^2 + \alpha^6 X^3 + \alpha^1 X^4 + \alpha^3 X^5 + \alpha^5 X^6 \\ \rightarrow \hat{\mathbf{U}}(X) = \mathbf{U}(X) \end{array}$$

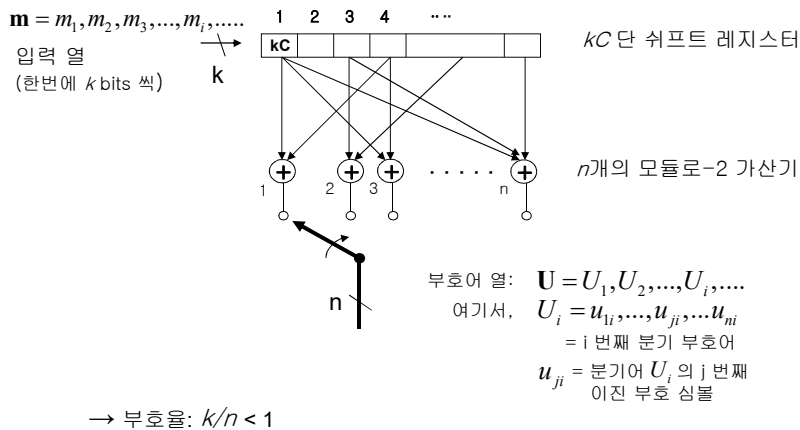
## 길쌈 부호

### □ 길쌈 부호 (Convolutional Code)

- 특징
  - AWGN 채널에서 좋은 성능
  - 간섭 존재 시 군집(burst) 오류 채널 하에서 좋은 성능
  - 연판정(soft-decision) 복호화
  - $n, k, C$ 로 표현
    - $n$ : 부호기 출력 부호어의 전체 비트
    - $k$ : 블록 부호기의 입력으로 들어가는 데이터 비트 수
    - $C$ : 구속장
- 적용
  - 위성통신
  - 이동통신
  - DBS(HDTV)

## 길쌈 부호

### □ $(n, k)$ 길쌈 부호기 (구속장은 $C$ )



## 길쌈 부호

### □ 구속장(constraint length)

- 현재 입력 비트가 출력에 영향을 미치는 열 이동 (shift) 수

### □ 자유거리(free distance)

- 블록 부호 :  $d_{\min}$  (최소거리)
- 길쌈 부호 :  $d_{free}$  (자유 거리)
- 정보 열 :  $\underline{m}$ ,  $\underline{m}'$
- 출력 열 :  $\underline{u}$ ,  $\underline{u}'$

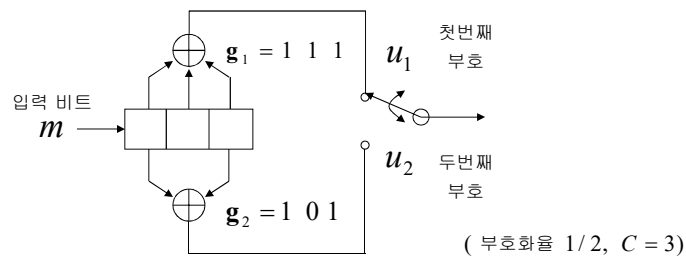
$$d_{free} = \min\{d_H(\underline{u}, \underline{u}')\}$$

$$t = \left\lceil \frac{d_{free} - 1}{2} \right\rceil : t \text{는 오류 정정 능력}$$

## 길쌈 부호

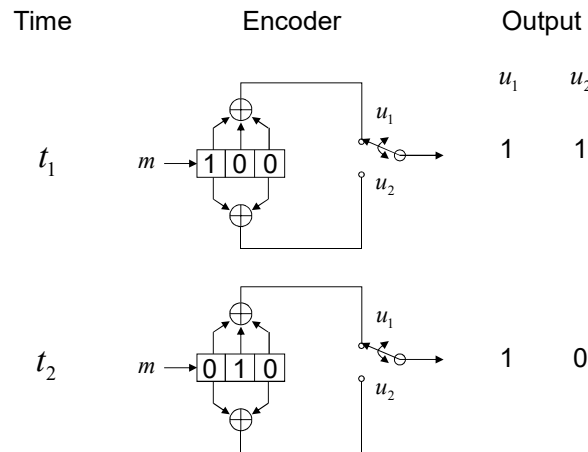
### ▪ 구속장 $C=3$ 인 (2, 1) 길쌈 부호

- 1 비트 입력, 2 비트 출력  $\rightarrow k/n = 1/2$
- 연결 벡터  $\mathbf{g}$ 의  $i$  번째 위치 값  $\begin{cases} 1 & \rightarrow \text{모듈로-2 가산기에 연결} \\ 0 & \rightarrow \text{연결하지 않음} \end{cases}$

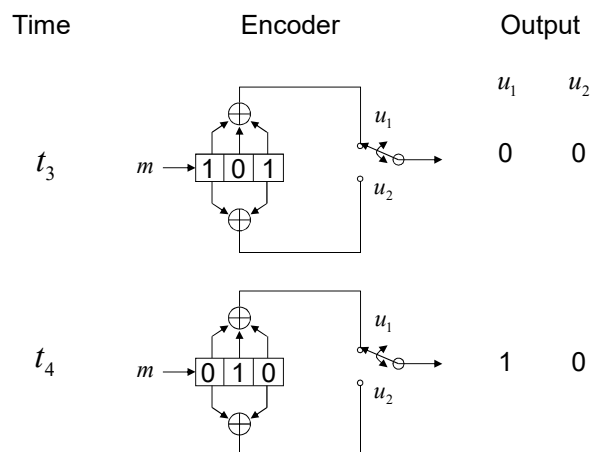


## 길쌘 부호

- $C = 3$ 인  $(2, 1)$  길쌘 부호기에 의한 입력열  $m = 101$ 의 부호화

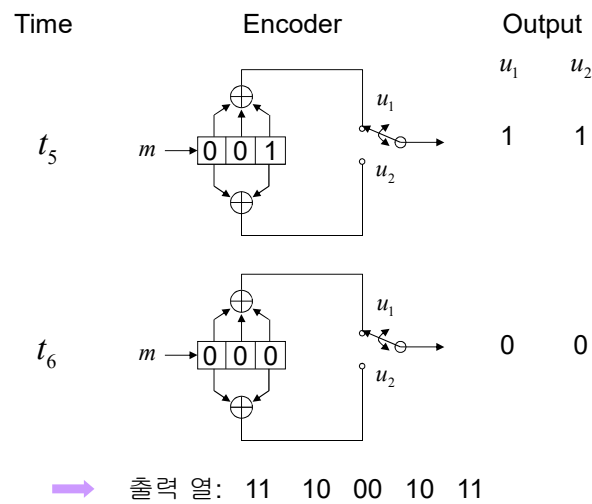


## 길쌘 부호





## 길쌘 부호



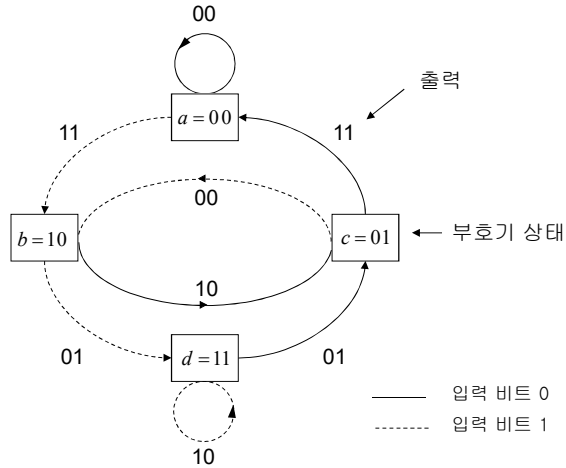
## 길쌘 부호

## □ State representation &amp; state diagram

- State
  - Possible contents of the leftmost  $C-1$  stages of register
  - In the boxes of diagram
- Paths between the states
  - Due to output branch words resulting from state transitions
- Possible transitions
  - Solid line : Due to input zero
  - Dashed link : Due to input one
- Output sequence is not only a function of the *input bit*, but also a function of the *C-1 prior bits*.

### 길쌈 부호

- 부호기 상태도 (부호율 1/2, C = 3)



### 길쌈 부호

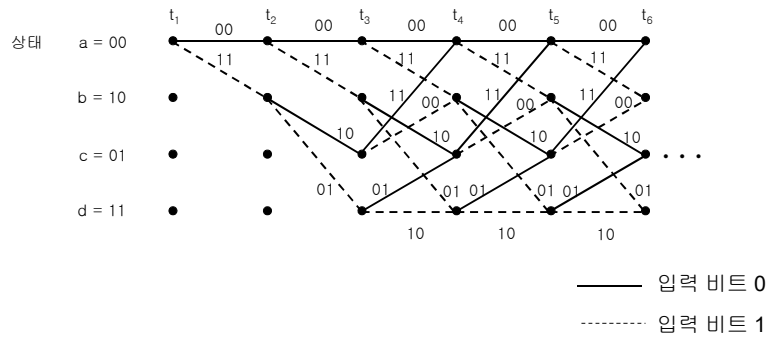
- 메시지 열,  $m=11011$  + 플러싱(flushing) 00 이 부호기 입력일 때

입력비트	레지스터 내용	$t_i$ 에서 상태 값	$t_{i+1}$ 에서 상태 값	$t_i$ 에서 부호어	
				$u_1$	$u_2$
-	0 0 0	00	00	-	-
1	1 0 0	00	10	1	1
1	1 1 0	10	11	0	1
0	0 1 1	11	01	0	1
1	1 0 1	01	10	0	0
1	1 1 0	10	11	0	1
0	0 1 1	11	01	0	1
0	0 0 1	01	00	1	1

→ 출력 열: U=11 01 01 00 01 01 11

## 길쌈 부호

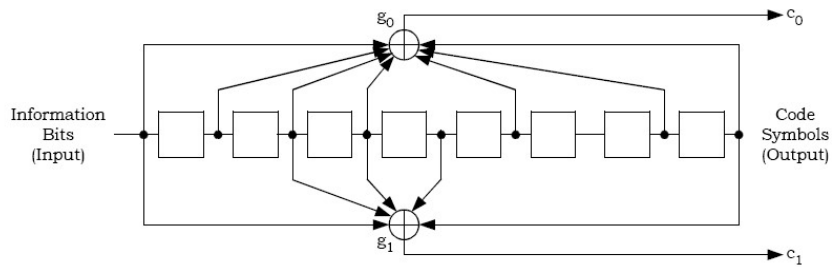
부호기 격자도(Trellis Diagram) (부호율  $\frac{1}{2}$ ,  $C = 3$ )



## 길쌈 부호

길쌈 부호의 응용

- IS-95 CDMA 순방향에서 사용하는 부호화기

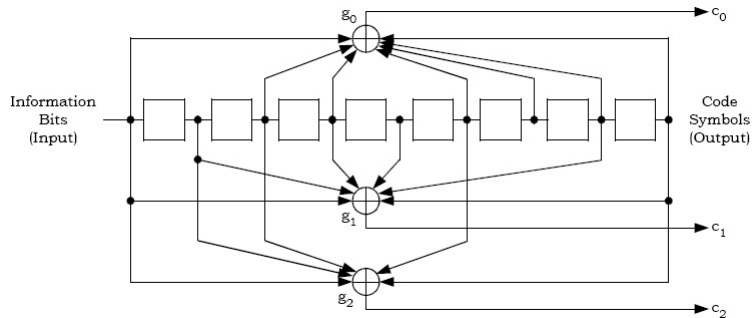


- 구속장  $C = 9$  인 (2,1) 길쌈 부호

## 길쌈 부호

### 길쌈 부호의 응용

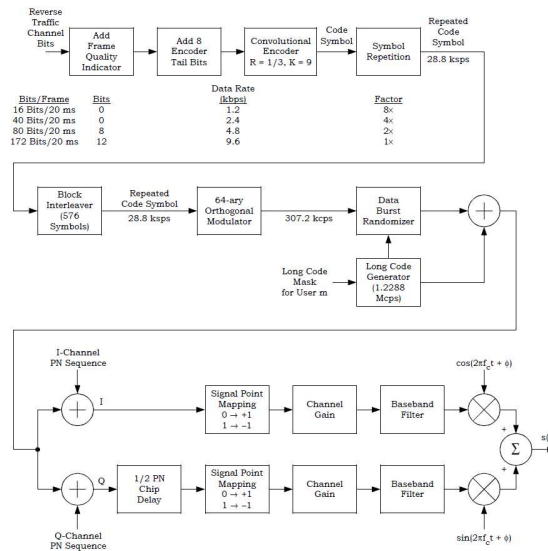
- IS-95 CDMA 역방향에서 사용하는 부호화기



- 구속장  $C = 9$  인 (3,1) 길쌈 부호

## 길쌈 부호

### 역방향 채널 (CDMA-2000)

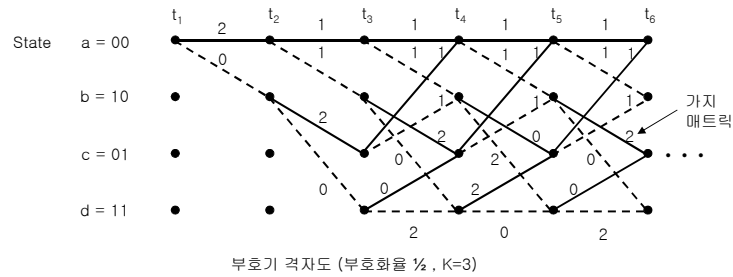


# 길쌈 부호

## 비터비 복호기 (Viterbi Decoder)

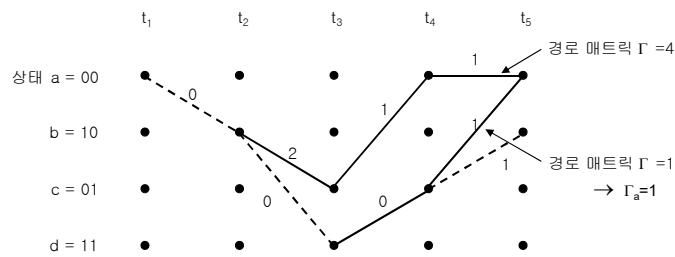
- 최대 우도 복호(maximum likelihood decoding) 방식

입력열 <b>m</b> :	1	1	0	1	1	...
전송열 <b>U</b> :	11	01	01	00	01	...
수신열 <b>Z</b> :	11	01	01	<b>10</b>	01	...
				(오류)		



부호기 격자도 (부호화율 1/2, K=3)

# 길쌈 부호

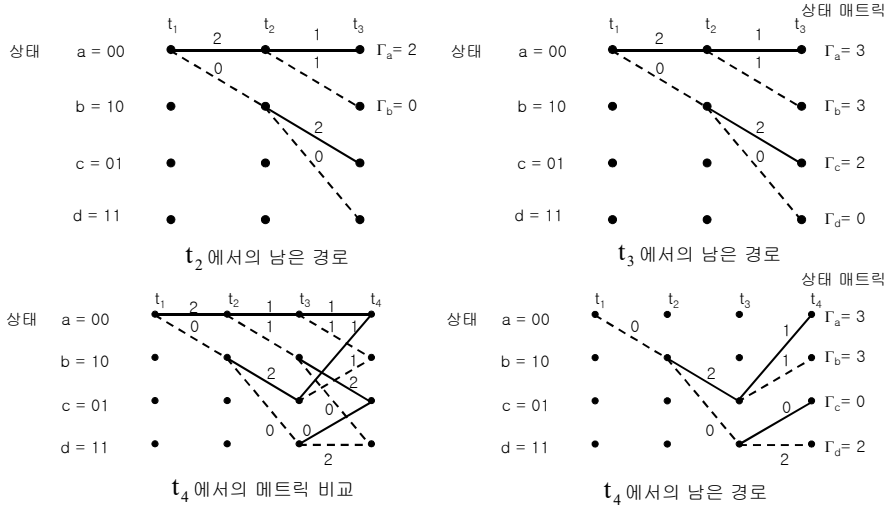


동일한 상태로 들어가는 두 경로의 매트릭

- 매트릭(=축적된 해밍(hamming) 거리)이 큰 것이 제거됨
- 위 쪽 경로가 4이고 아래가 1이므로 위 경로가 제거됨

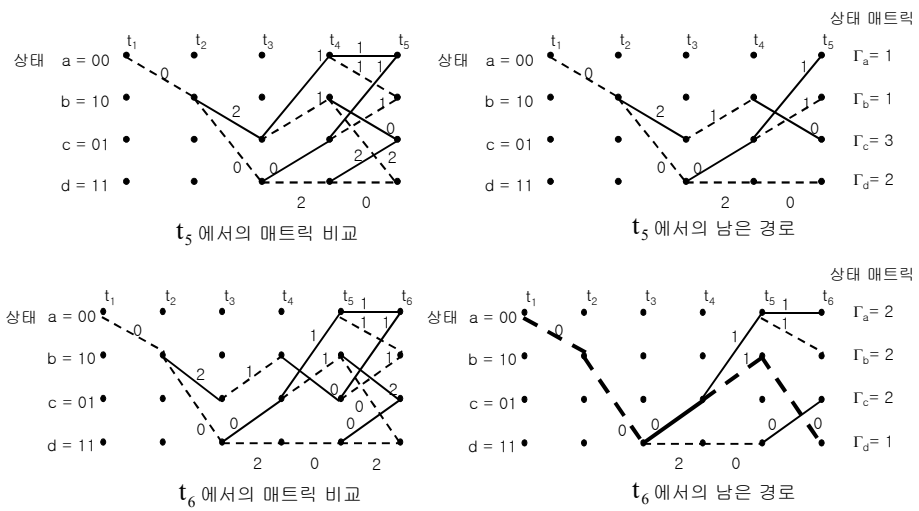
# 길쌈 부호

채널 부호화



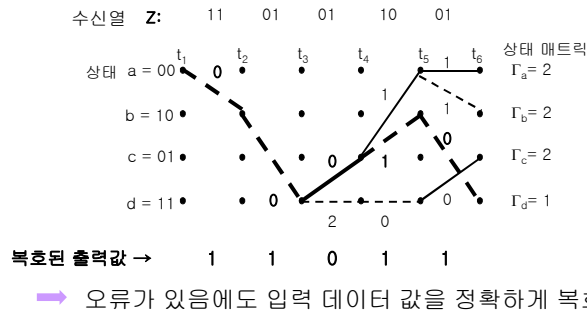
# 길쌈 부호

채널 부호화



## 길쌈 부호

- 시간  $t_6$ 에서 최소 상태 매트릭 값( $\Gamma_a=1$ )을 갖는 경로를 선택
- 가지치기 후, ( 경로 수  $\leq$  상태 수 )  $\rightarrow$  비교 경로의 감소  
(모든 가능한 경로를 비교하는 경우,  $2^L$  개 경로 비교, L은 분기어 길이)



## 길쌈 부호

■ 결과 (구속장 C=3 (2,1) 길쌈부호)

- 입력 비트

입력열 m: 1 1 0 1 1

- 송신 비트

전송열 u: 11 01 01 00 01

- 수신 비트

수신열 z: 11 01 01 10 01  
(오류)

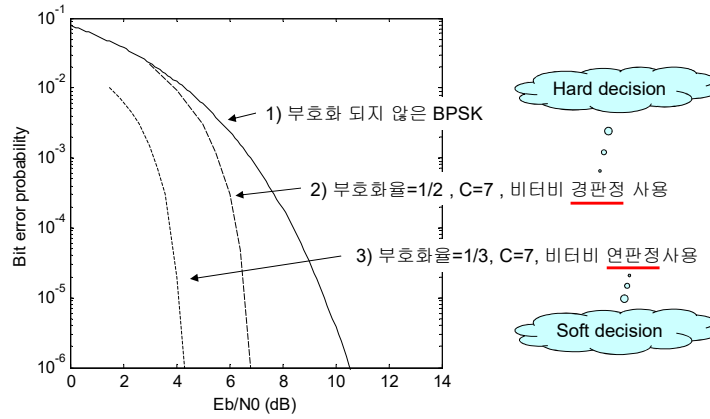
- 복호된 비트

추정값  $\hat{m}$ : 1 1 0 1 1

$\rightarrow$  오류 정정

# 길쌈 부호

## 부호화 이득



→  $10^{-6}$  을 기준으로 부호화 했을 경우 2)는 약 4 dB, 3)은 약 6dB이상 부호화 이득을 얻음