제 7 장 면적모멘트와 도심

7.1 서론

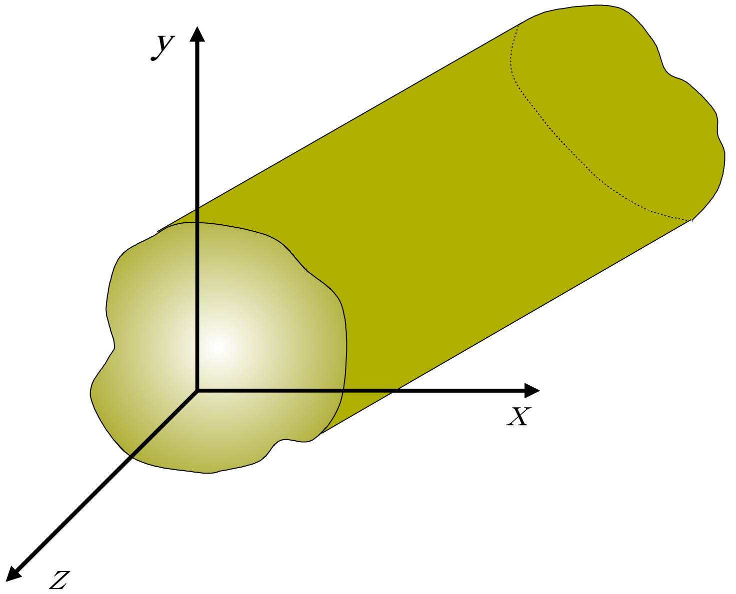

그림 7.1

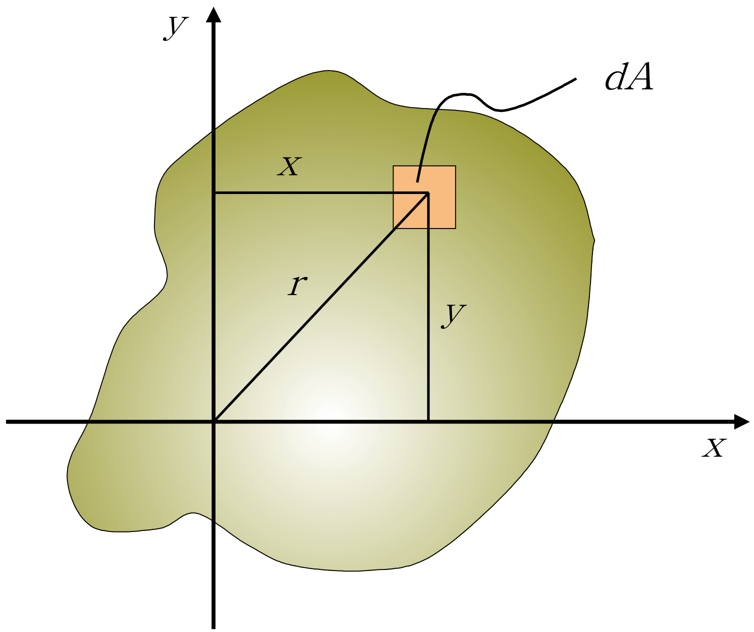

그림 7.2

7.2 면적 1차 모멘트와 도심

7.2.1 면적 1차 모멘트

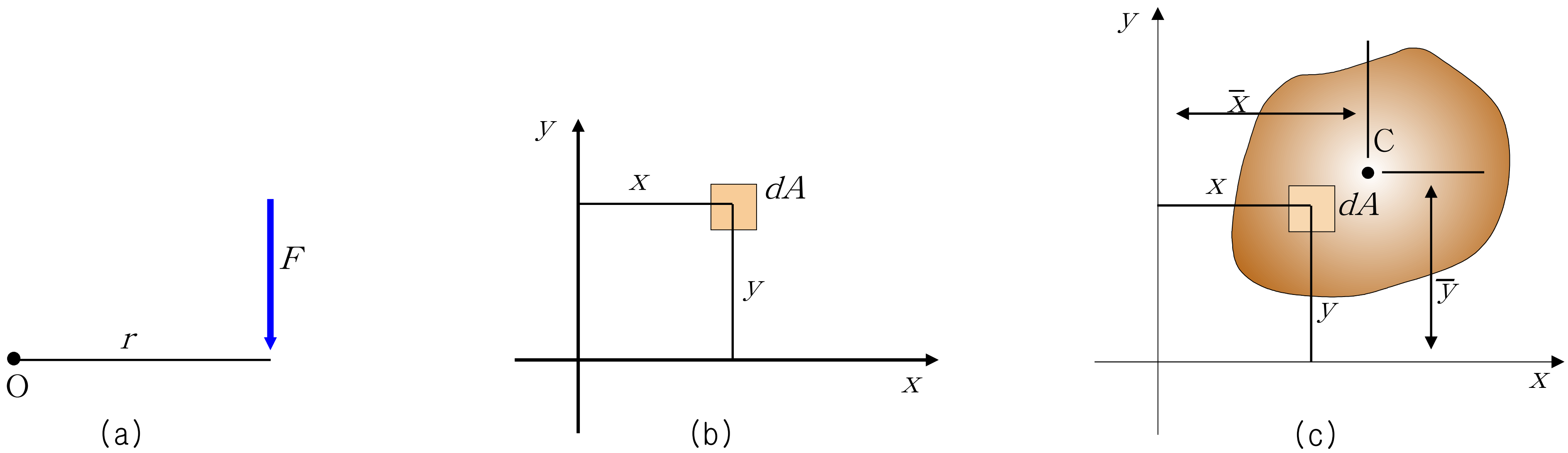

그림 7.3 면적 1차 모멘트(first moment of the area)와 도심(centroid)의 개념

$$M_0 = r \cdot F \tag{7.1}$$

$$dQ_x = y \cdot dA \tag{7.2}$$

$$dQ_y = x \cdot dA \tag{7.3}$$

$$\boxed{Q_x \;=\int y \cdot dA = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \Delta A_i} \tag{7.4}$$

$$\boxed{Q_y \;=\int x \cdot dA = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \Delta A_i} \tag{7.5}$$

7.2.2 도심

$$Q_x = \int_A y\,dA = \sum_{i=1}^{n} y_i\,\Delta A_i = \bar{y} \cdot A \tag{7.6}$$

$$Q_y = \int_A x\,dA = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta A_i = \bar{x} \cdot A \tag{7.7}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Delta A_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i}} \tag{7.8}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta A_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i}} \tag{7.9}$$

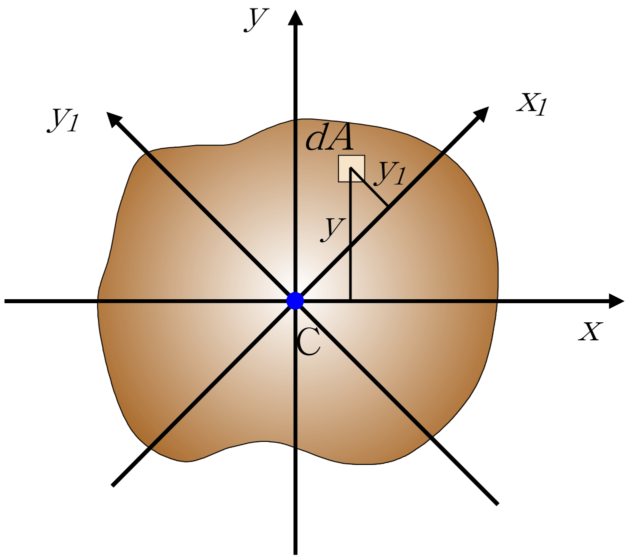

그림 7.4 임의도형의 도심을 지나는 좌표축

$$Q_x = \int y \cdot dA = Q_{x_1} = \int y_1 dA = 0$$
$$Q_y = \int x \cdot dA = Q_{y_1} = \int x_1 dA = 0$$

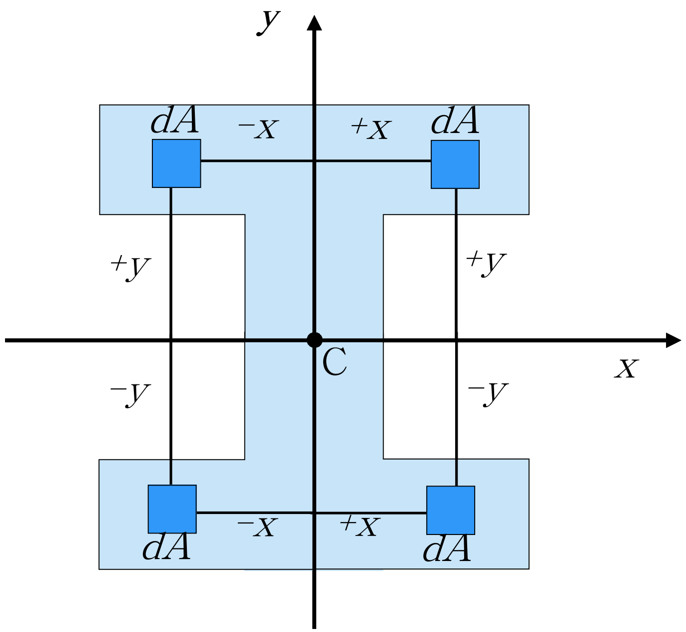

그림 7.5 선대칭 도형

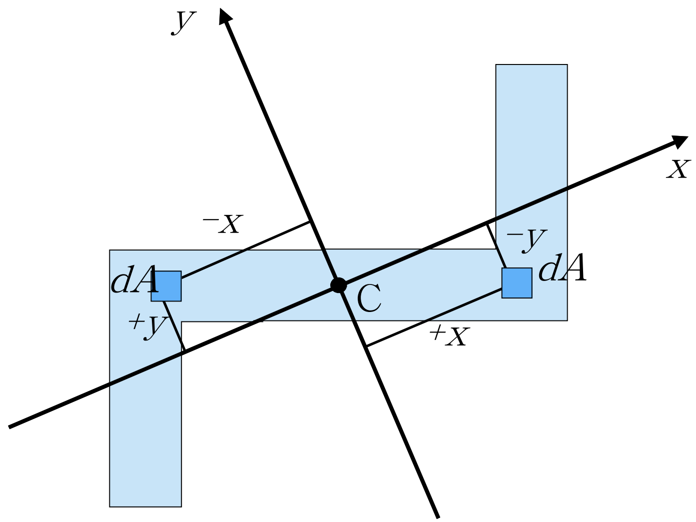

그림 7.6 점대칭 도형

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \Delta A_i$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \Delta A_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \, \Delta A_i}{\sum \Delta A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \, \Delta A_i}{\sum \Delta A_i} \qquad (7.10)$$

7.3 면적 2차 모멘트(면적 관성모멘트)

7.3.1 면적 2차 모멘트

$$I_x = \int y^2 \, dA \tag{7.11}$$

$$I_y = \int x^2 \, dA \tag{7.12}$$

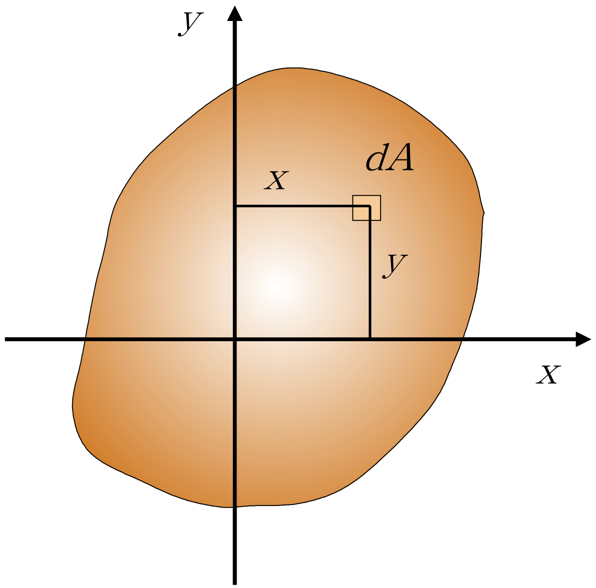

그림 7.12

7.3.2 회전반경

$$I_x = \int y^2 dA = r_y^2 \cdot A \tag{7.13}$$

$$I_y = \int x^2 dA = r_x^2 \cdot A \tag{7.14}$$

$$\boxed{r_x = \sqrt{I_y / A} = \sqrt{\int x^2 dA / A}} \tag{7.15}$$

$$\boxed{r_y = \sqrt{I_x / A} = \sqrt{\int y^2 dA / A}} \tag{7.16}$$

7.3.3 면적 관성모멘트에 대한 평행축 정리

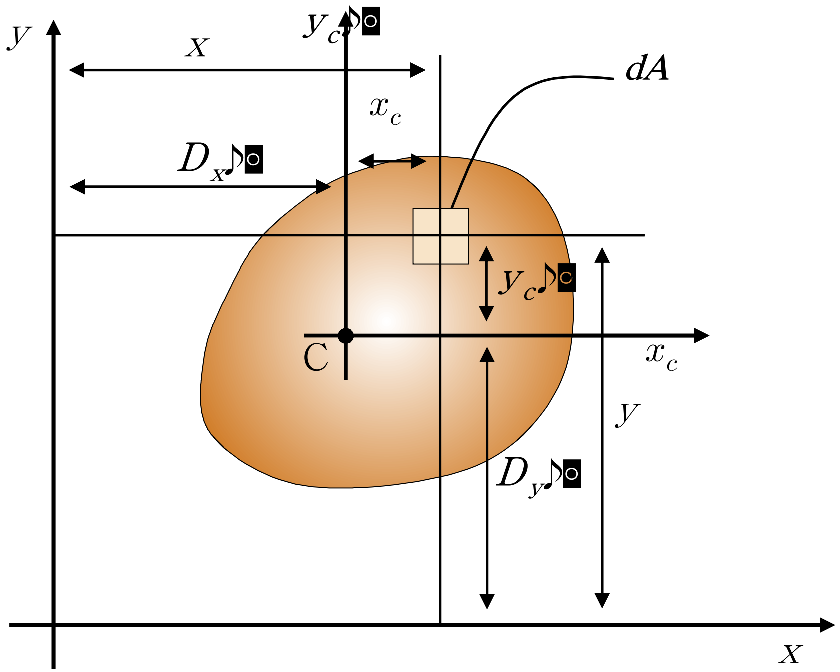

그림 7.14

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int y^2 dA \qquad (7.17)\\
&= \int (y_c + D_y)^2 dA \\
&= \int y_c^2 dA + 2D_y \int y_c dA + D_y^2 \int dA
\end{aligned}
$$

$$\boxed{I_x = I_{xc} + D_y^2\, A} \tag{7.18}$$

$$\boxed{I_y = I_{yc} + D_x^2\, A} \tag{7.19}$$

7.4 면적 극관성모멘트

7.4.1 면적 극관성모멘트

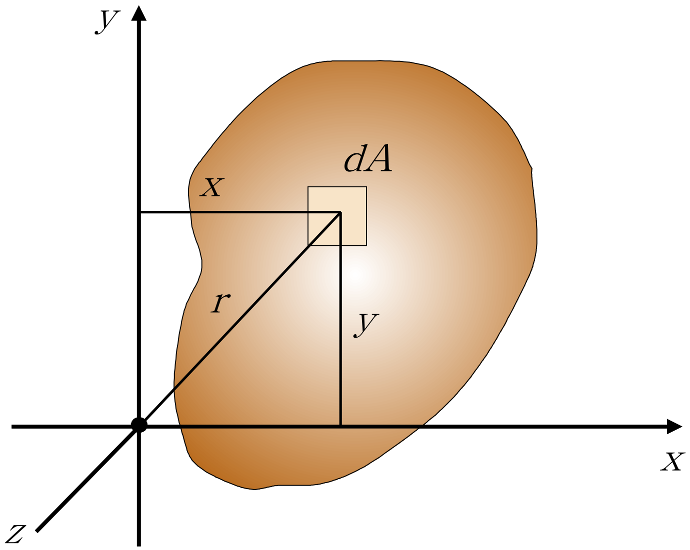

그림 7.15

$$I_z = \int r^2 dA \tag{7.20}$$

$$I_z = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA \tag{7.21}$$

$$\therefore I_z = I_x + I_y$$

7.4.2 극관성모멘트에 대한 평행축 정리

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= I_{xc} + D_y^2\,A \\ I_y &= I_{yc} + D_x^2\,A \end{aligned}}$$

$$I_z = I_x + I_y$$

$$I_z = (I_{xc} + I_{yc}) + (D_x^2 + D_y^2)A \qquad (7.22)$$

$I_{zc} = I_{xc} + I_{yc}$, $D^2 = D_x^2 + D_y^2$ 이므로

$$I_z = I_{zc} + D^2A \qquad (7.23)$$

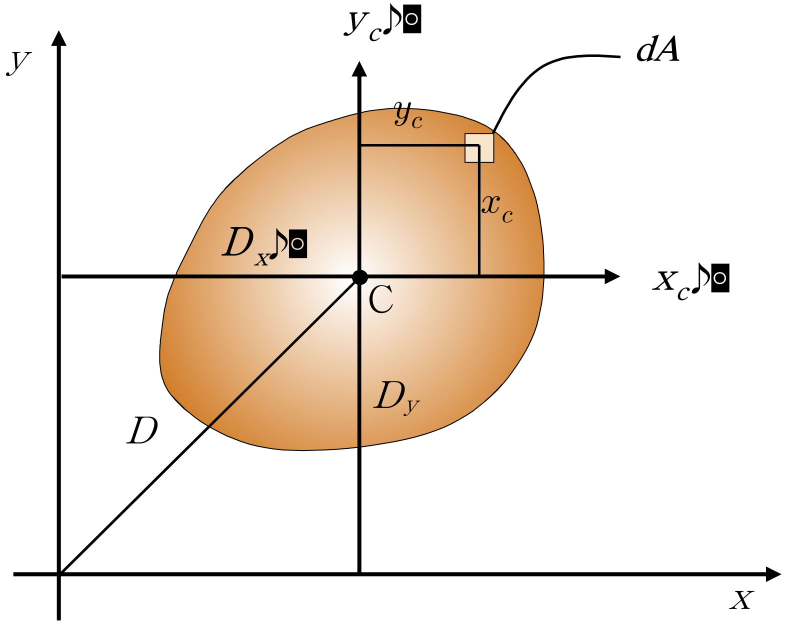

그림 7.16

7.5 면적 관성상승모멘트

7.5.1 면적 관성상승모멘트

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA \qquad (7.24)$$

7.5.2 면적 관성상승모멘트의 평행축 정리

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int xy\,dA \qquad (7.25) \\ &= \int (x_c + D_x)(y_c + D_y)\,dA \\ &= \int x_c\,y_c\,dA + D_y \int x_c\,dA + D_x \int y_c\,dA + D_x D_y \int dA \\ &= \int x_c\,y_c\,dA + D_x D_y \int dA \end{aligned}$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + D_x D_y A \qquad (7.26)$$